I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

Argumentácia v matematike

pre 9. ročník ZŠ
a 4. ročník GOŠ

2. zošit

Projekt ***MaTeK***

***O**rbis**P**ictus**I**stropolitana*

5 Lineárne nerovnice

A1 V každodennom živote sa stretávame s vyjadreniami, ktoré sa dajú zapísať pomocou nerovností. Navrhni zápis nerovnosti a vysvetli, ako vieš, že tvoja nerovnosť je správna.

a Upozornenie v kine: *Filmy premietame len v prípade, ak si vstupenku zakúpilo aspoň 5 divákov.*

Aspoň päť divákov znamená 5 a viac, preto ide o nerovnosť $x \geq 5$

b *Vstupenky nie je možné vrátiť ani stornovať. Vstupenky Vám vieme presunúť na iné Vami zvolené premietanie vtedy, ak o to požiadate najneskôr 30 minút pred začiatkom daného predstavenia.*

Najneskôr 30 minút pred začiatkom je 30 minút a viac, teda $x \geq 30$

c *Svetový rekord v behu na 100 metrov odbehol Usain Bolt s časom 9,58 s. Ak má padnúť nový svetový rekord, musí bežec zabehnúť 100 m za kratší čas.*

Kratší čas ako 9,58 s znamená menej ako 9,58 s, preto $x < 9{,}58$

d *Vážení cestujúci! Práce na ceste budú trvať minimálne tri týždne, použite prosím obchádzkovú trasu.*

Minimálne tri týždne znamená tri a viac, preto $x \geq 3$

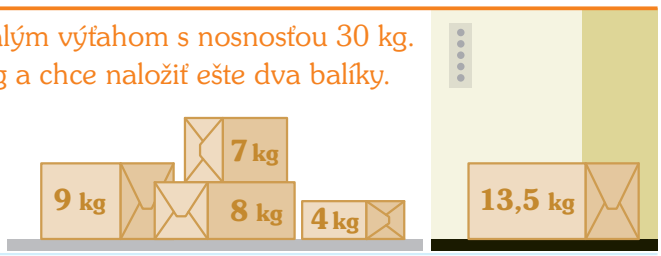
e *Vo väčšine európskych štátov je maximálna povolená rýchlosť v obci 50 kilometrov za hodinu.*

Maximálna rýchlosť je 50 km/hod znamená 50 a menej, teda $x \leq 50$

f V príbalovom letáku k lieku je odporúčanie: *Nepoužívajte dlhšie ako 6 mesiacov po otvorení.*

Nie dlhšie ako 6 znamená 6 a menej mesiacov, preto $x \leq 6$

A2 Na pošte prevážajú balíky do garáže na odvoz malým výťahom s nosnosťou 30 kg. Pani Mária doň vložila balík s hmotnosťou 13,5 kg a chce naložiť ešte dva balíky.



a Čo musí platiť pre celkovú hmotnosť týchto dvoch balíkov? Podmienku zapíš nerovnosťou.

$x + 13{,}5 \leq 30 \quad / - 13{,}5$

$x \leq 16{,}5$ kg

b Ktoré dva balíky môže pani Mária do výťahu ešte naložiť? Zdôvodni to.

Balíky môžu spolu vážiť najviac 16,5 kg, preto môže naložiť ľubovoľné dva, okrem kombinácie 9 kg a 8 kg, lebo to je spolu 17 kg. Najefektívnejšia by bola voľba 9 kg plus 7 kg.

A3 Informácie z textu sú zapísané pomocou nerovnosti niekoľkými spôsobmi. Označ ten, ktorý je správny. Pri nesprávnych vysvetli, prečo sú nesprávne.

a *Predpoveď počasia na zajtra hlási, že najvyššia denná teplota bude 17 °C a najnižšia 5 °C.*

- ☐ $5\ °C \geq t \leq 17\ °C$ — Teplota by musela byť 5 °C alebo nižšia.
- ☒ $5\ °C \leq t \leq 17\ °C$
- ☐ $5\ °C < t < 17\ °C$ — Teplota by nemohla byť presne 17 °C ani 5°C, je však hlásená.
- ☐ $5\ °C \leq t \geq 17\ °C$ — Teplota by musela byť 17 °C alebo vyššia.

b *Študenti majú nárok na zľavnené cestovné od dovŕšenia 18. roku, najviac však do dňa predchádzajúcemu dovŕšeniu 26. roku.*

- ☐ $18 \leq v > 26$ — Zľava by platila iba pre starších ako 26 rokov.
- ☐ $18 \leq v \leq 26$ — Zľava by platila aj v deň narodenín 26-ročných.
- ☐ $18 > v \leq 26$ — Zľava by platila iba pre mladších ako 18 rokov.
- ☒ $18 \leq v < 26$

A4 Žiaci mali určiť, či nerovnosti na kartičkách vyjadrujú to isté alebo nie, a mali aj vysvetliť, prečo je to tak.

$3 < x$ | $x > 3$ | $3 > x$ | $x < 3$

Maťo: „Podľa mňa je to stále to isté. Tie isté čísla, tie isté písmená, ten istý zobáčik…“

Šimon: „Veď si stačí na kartičkách poprehadzovať *x*-ká s trojkami, nech je *x*-ko vždy vľavo, a hneď je jasné, že rovnaké nerovnosti sú na oranžovej a fialovej kartičke a aj na zelenej a žltej kartičke.“

Janka: „To čo by bolo za úlohu? Určite je tam chyták! Ja si myslím, že záleží na tom, ako je ten zobáčik otočený. Takže rovnaké nerovnosti sú na oranžovej a fialovej kartičke a potom na zelenej a žltej kartičke.“

a Ktoré z detí má pravdu?

Znak nerovnosti („zobáčik“) porovnáva dve hodnoty. „Otvorený zobáčik“ smeruje k väčšej hodnote, to znamená, že záleží na orientácii znaku – v tomto má Janka pravdu, ale aj tak určila rovnaké nerovnosti nesprávne. Na oranžovej kartičke je nerovnosť x je väčšie ako 3, kým na fialovej x je menšie ako 3, preto tieto nerovnosti nie sú rovnaké. Šimonov návrh je nesprávny, lebo „prehodením“ neznámej na ľavú stranu nerovnosti sa zmení interval. Na fialovej kartičke je: „x je menšie ako 3“. Ak číslo 3 a neznámu x vymeníme, dostaneme, naopak, že: „x je väčšie ako 3“. Pravdu nemá ani Maťo, všetky zápisy nevyjadrujú to isté.

b Ktoré nerovnosti podľa teba vyjadrujú to isté? Prečo si to myslíš?

Nerovnosti na oranžovej a zelenej kartičke vyjadrujú to isté, lebo na oboch ide o hodnoty x väčšie ako 3. Druhá dvojica je fialová a žltá kartička, na oboch ide o hodnoty x menšie ako 3.

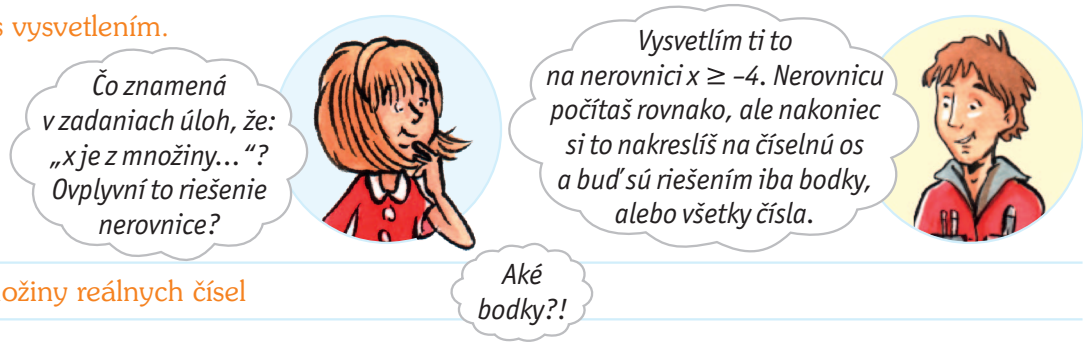
A5 Ktoré z nerovností platia pre hodnotu $x = 3$? Svoju odpoveď zdôvodni.

$x + 7 < 10$ | $2x + 4 > 15$ | $7x - 10 < 6x + 5$ | $14 < 6 + 3x$ | $4x - 2 > 3x + 5$

Za x dosadíme hodnotu 3 a skontrolujeme, či nerovnosti platia:

Fialová:	Žltá:	Sivá:	Zelená:	Červená:
$3 + 7 < 10$	$2 \cdot 3 + 4 > 15$	$7 \cdot 3 - 10 < 6 \cdot 3 + 5$	$14 < 6 + 3 \cdot 3$	$4 \cdot 3 + 2 > 3 \cdot 3 + 5$
$10 < 10$	$10 > 15$	$11 < 23$	$14 < 25$	$14 > 14$
neplatí	neplatí	platí	platí	neplatí

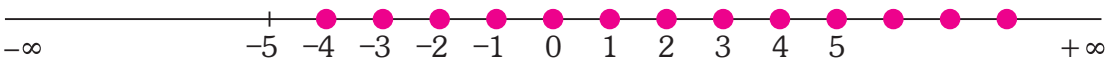
A6 Pomôž Jurkovi s vysvetlením. Do číselnej osi dokresli riešenie a doplň slová.



a $x \geq -4$, x je z množiny reálnych čísel

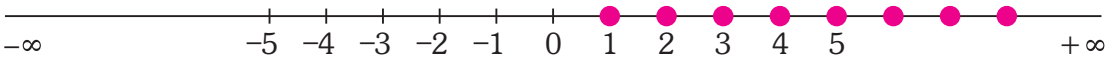
Riešením sú všetky reálne čísla od –4 až po plus nekonečno.
Ak by sme každé z nich označili farebne,
tak na číselnej osi dostaneš polpriamku.

b $x \geq -4$, x je z množiny celých čísel



Riešením sú iba celé čísla väčšie alebo rovné ako –4, teda –4, –3, –2, …
Medzi dvoma susednými celými číslami nie je žiadne iné riešenie,
preto to vyzerá tak, že na číselnej osi sú iba bodky.

c $x \geq -4$, x je z množiny prirodzených čísel



Riešenie je rovnaké ako pri celých číslach,
ale teraz berieš do úvahy len kladné celé čísla.
Na číselnej osi dostaneš opäť len bodky začínajúce na čísle 1.

A7 Na štadióne počas karnevalu predávajú teplé kakao a šišky. Ľubo je hladný, preto si chce kúpiť veľké kakao a čo najviac malých šišiek, no má len 5 eur.

Cenník

malé kakao	1,00 €
veľké kakao	1,70 €
malá šiška	0,80 €
veľká šiška	1,50 €

a Ktorá z nerovníc správne opisuje túto situáciu? Svoj výber zdôvodni.

- ☐ $0{,}8x + 1{,}7 \geq 5$
- ☐ $0{,}8x - 1{,}7 < 5$
- ☒ $1{,}7 + 0{,}8x \leq 5$
- ☐ $0{,}8x + 1{,}7 > 5$

Správna je tretia nerovnica, lebo môže minúť najviac 5 eur, teda môže platiť 5 a menej, čo je v druhej a tretej nerovnici. Cenu za šišky určíme ako x-násobok 0,8, kde x je počet šišiek. K tomu musíme prirátať 1,70 € za kakao, aby sme zistili výslednú sumu.

b Koľko najviac malých šišiek si môže Ľubo kúpiť?

$$1{,}7 + 0{,}8x \leq 5 \quad / - 1{,}7$$
$$0{,}8x \leq 3{,}3 \; / : 0{,}8$$
$$x \leq 4{,}125$$

Ľubo si môže kúpiť najviac 4 šišky.

A8 Alex tvrdí, že nie všetky nerovnice majú riešenie a niekedy to je aj na prvý pohľad jasné. Uviedol tri príklady. Súhlasíš s ním? Svoje rozhodnutie pre každú nerovnicu zdôvodni.

$x + 5 < x + 3$	$8 + 4x \geq 13 + 4x$	$4x < 2x$
má riešenie – nemá riešenie	**má riešenie – nemá riešenie**	**má riešenie – nemá riešenie**
Lebo ak k nejakému číslu (x) pripočítame 5, bude to určite viac, ako keby sme k tomu istému číslu pripočítali 3.	Lebo ak k štvornásobku nejakého čísla ($4x$) pripočítame 8, nikdy to nebude viac alebo rovné, ako keď k tomu istému $4x$ pripočítame 13.	Lebo pre kladné x 4-krát nejaké číslo nikdy nie je menej ako 2-krát to isté číslo, preto nerovnica nemá riešenie. Pre záporné x nerovnica má riešenie, napr. ak $x = -1$, potom $4 \cdot (-1) < 2 \cdot (-1)$.

A9 Napíš tri rôzne nerovnice, ktoré nemajú riešenie.

A10 Tri žiačky riešili tú istú nerovnicu.
Vyšli im rôzne výsledky, ale podľa skúšky správnosti riešili nerovnicu správne.

a Rozhodni, ktorá z nich počítala správne, prípadne v ktorom riadku je chyba.

$$\frac{1+3x}{2} < \frac{9}{2} + \frac{1-2x}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2 \cdot (1+3x) < 18 + 1 - 2x$$

$$2 + 6x < 19 - 2x \quad / -6x - 19$$

$$\underline{-21} < -8x \quad / : (-8)$$

$$x < \frac{21}{8}$$

správne – nesprávne Chyba v riadku: 4

Soňa

Skúška:

ĽS: $\frac{1+3\cdot 2}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

PS: $\frac{9}{2} + \frac{1-2\cdot 2}{4} = \frac{18+1-4}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

ĽS < PS

$$\frac{1+3x}{2} < \frac{9}{2} + \frac{1-2x}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2 \cdot (1+3x) < 18 + 1 - 2x$$

$$2 + 6x < 19 - 2x \quad / -2 + 2x$$

$$8x < 17 \quad / : 8$$

$$x < \frac{17}{8}$$

správne – nesprávne Chyba v riadku:

Monika

Skúška:

ĽS: $\frac{1+3\cdot 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

PS: $\frac{9}{2} + \frac{1-2\cdot 1}{4} = \frac{18+1-2}{4} = \frac{17}{4}$

ĽS < PS

$$\frac{1+3x}{2} < \frac{9}{2} + \frac{1-2x}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2 \cdot (1+3x) < \underline{9} + 1 - 2x$$

$$2 + 6x < 10 - 2x \quad / -2 + 2x$$

$$8x < 8 \quad / : 8$$

$$x < 1$$

správne – nesprávne Chyba v riadku: 2

Iva

Skúška:

ĽS: $\frac{1+3\cdot 0}{2} = \frac{1}{2}$

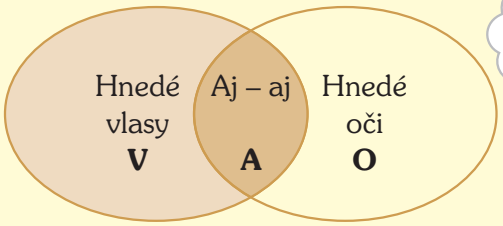
PS: $\frac{9}{2} + \frac{1-2\cdot 0}{4} = \frac{18+1}{4} = \frac{19}{4}$

ĽS < PS

b Vysvetli, ako je možné, že každej z nich vyšla skúška správnosti, hoci to nemusia mať všetky tri správne.

Lebo nerovnosť overili len na jednom čísle (Soňa na 2 a Iva na 0) a tie patria do intervalu riešenia. Keby Soňa overila nerovnosť na čísle 2,5 (ktoré tiež patrí do intervalu jej riešenia), skúška by jej nevyšla.
Ive vyšiel „menší“ interval ako Monike, na hocijakom čísle z jej intervalu by jej skúška vyšla, ale jej interval neobsahuje všetky riešenia, napr. číslo 2.

A11 Diagram znázorňuje rozdelenie žiakov školy na hnedovlasých (V), hnedookých (O) a tých, ktorí majú aj hnedé vlasy, aj hnedé oči (A). Rozhodni, či sú nerovnosti o počte jednotlivých žiakov pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy. Svoje rozhodnutie zdôvodni.



a $V > O$
Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo v škole môže (ale nemusí) byť viac žiakov s hnedými vlasmi ako s hnedými očami.

b $V \leq O$
Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo v škole môže (ale nemusí) byť menej alebo rovnako veľa žiakov s hnedými vlasmi ako s hnedými očami.

Ak je pre žiakov úloha ťažká, navrhnite im, aby si za V, A a O doplnili čísla podľa svojej triedy a potom uvažovali aj o iných triedach/školách a následne rozhodli, či sú nerovnosti pravdivé a za akých okolností.

c $V \geq A$
Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo nie všetci, ktorí majú hnedé vlasy, majú aj hnedé oči, preto je číslo A určite menšie, nanajvýš rovné ako V.

d $A \leq O$
Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo žiaci, ktorí majú hnedé aj vlasy aj oči, patria medzi tých, ktorí majú hnedé oči. Preto ich počet A je menší, nanajvýš rovný O.

A12 Leo mal na začiatku prázdnin na účte našetrených 350 eur. Týždenne z týchto úspor minie priemerne 27 eur. Koľko týždňov si to môže dovoliť, ak chce mať na konci prázdnin na účte aspoň 140 eur?

a Zapíš situáciu nerovnicou. Vysvetli správnosť svojho postupu.

$350 - 27x \geq 140$

Od počiatočnej hodnoty 350 eur sa každý týždeň odráta 27 eur, teda 27-krát (počet týždňov označíme x), lebo suma na účte sa zmenšuje. Zostatok musí byť aspoň 140 eur, teda viac alebo nanajvýš rovné 140.

b Nerovnicu vyrieš.

$350 - 27x \geq 140 \quad / - 140$

$210 - 27x \geq 0 \quad / + 27x$

$210 \geq 27x \quad / : 27$

$7{,}78 \geq x$

Leo môže týždenne z úspor na účte míňať priemerne 27 eur počas 7 týždňov.

c Navrhni znenie slovnej úlohy, ktorá sa dá vyriešiť pomocou nerovnice $7 + 12x < 100$.

Napr. Povinné paušálne členské v športovej hale stojí 7 eur a za jednorazový prenájom kurtu sa platí 12 eur. Koľkokrát si môžem kurt v tejto hale prenajať, ak chcem celkovo zaplatiť menej ako 100 eur?

6 Povrch a objem telies

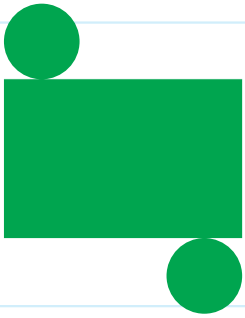
A1 O každom obrázku rozhodni, či je na ňom znázornená sieť valca. Odpoveď zdôvodni.

a

áno – **nie**

Ak obdĺžnik zrolujeme pozdĺž dlhšej strany, dostaneme plášť a kruhy budú podstavy valca.

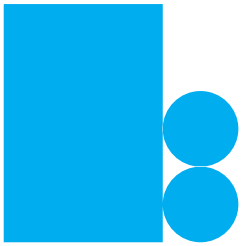
b



áno – **nie**

Ak obdĺžnik zrolujeme pozdĺž dlhšej strany, dostaneme plášť a kruhy budú podstavy valca.

c



áno – **nie**

Ak obdĺžnik zrolujeme pozdĺž hociktorej strany, kruhy nevytvoria podstavy valca.

d

áno – **nie**

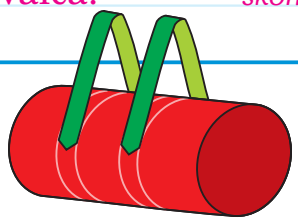
Ak obdĺžnik zrolujeme pozdĺž kratšej strany, dostaneme plášť a kruhy budú podstavy valca.

So žiakmi diskutujte o podmienke, ktorá musí byť v úlohách a, b, d splnená: dĺžka strany obdĺžnika, pozdĺž ktorej ho zrolujeme, musí byť rovnaká ako obvod kruhu. Žiaci môžu túto dĺžku aspoň odhadom skontrolovať.

A2 Adam chce, aby mu sestra ušila športovú tašku, do ktorej sa mu zmestí všetko potrebné. Dal jej tieto pokyny:

1. *Dĺžka tašky bude 60 cm.*
2. *Taška bude mať kruhové konce s priemerom 25 cm.*
3. *Telo tašky bude vyrobené z 3 kusov; dva kruhové konce a prostredná časť.*

Aký bude objem tašky v celých litroch? Vysvetli svoj postup uvažovania.



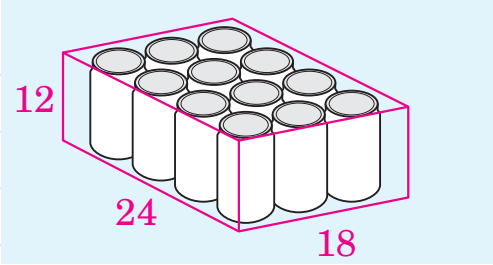
Počítaj s hodnotou $\pi = 3{,}14$.

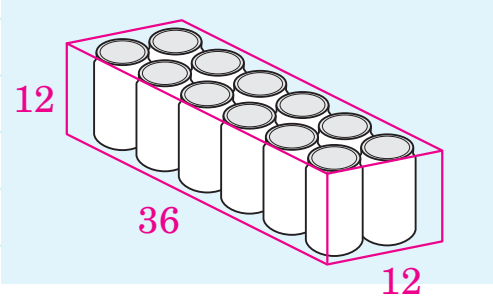
Taška má tvar valca, jej objem preto vypočítame $V = \pi r^2 \cdot v$, kde v je dĺžka tašky a r je polovica z priemeru kruhových koncov.

Preto $V = 3{,}14 \cdot 12{,}5^2 \cdot 60 = 29\,437{,}5\ \text{cm}^3 = 29{,}437\,5\ \text{dm}^3 = 29{,}437\,5\ \text{l}$.

Taška bude mať objem približne 29 litrov.

A3 Výrobca biosmoothie uvažuje, či plechovky so smoothie baliť do škatúľ po 4×3 ks alebo po 2×6 ks. Čo mu poradíš a ako to zdôvodníš? Plechovka so smoothie má tvar valca s výškou 12 cm a priemerom 6 cm.





Obe balenia zaberú rovnaký objem, lebo rozmery plechoviek sa nemenia a v oboch baleniach je po 12 ks. Dá sa to overiť aj výpočtom: $12 \cdot 24 \cdot 18 = 36 \cdot 12 \cdot 12$

Výrobca by mal brať do úvahy povrch balenia, lebo od neho závisí spotreba obalového materiálu.

Povrch balenia 4 × 3:

$12 \cdot 24 \cdot 2 + 12 \cdot 18 \cdot 2 + 24 \cdot 18 \cdot 2 = 1\,872\ \text{cm}^2$

Povrch balenia 2 × 6:

$12 \cdot 12 \cdot 2 + 36 \cdot 12 \cdot 2 + 36 \cdot 12 \cdot 2 = 2\,016\ \text{cm}^2$

Keďže na balenie 4 × 3 sa spotrebuje menej materiálu, výrobca by mal zvoliť túto možnosť (ekonomické a ekologické hľadisko).

A4 Plášť valcovej nádoby bol vyrobený tak, že stočili plech tvaru štvorca s dĺžkou strany 1,5 m. Koľkokrát väčšia je výška tejto nádoby ako jej priemer? Zdôvodni to.

Keďže nádoba vznikla stočením štvorca, výška v je 1,5 m a je rovnaká ako obvod podstavy (o), z čoho dostaneme:

$o = 2\pi r = \pi d = v$, teda $1{,}5 = \pi d$. Preto $d = \frac{1{,}5}{\pi}$.

Výška je 1,5 m, preto výška nádoby je π-krát väčšia ako priemer nádoby, teda asi 3-krát väčšia.

A5 Americký umelec rusínskeho pôvodu *Andy Warhol* sa stal slávnym vďaka dielu *Campbellove polievky.* Ide o kolekciu 32 plátien, pričom na každom plátne rozmerov 50,8×40,6 cm je maľba plechovky konzervovanej polievky. Keď sa umelca pýtali, prečo sa rozhodol namaľovať práve Campbellove polievky, odpovedal: *„Kedysi som mal každý deň rovnaký obed, hádam dvadsať rokov, stále dokola to isté, Campbellovu polievku v plechovke.“*

Koľko litrov polievky Andy za 20 rokov zjedol, ak skutočná plechovka je vysoká 10 cm a jej priemer je 6,5 cm? Plechovka je naplnená na 95 %. Riešenie vysvetli a zdôvodni.

Plechovka má tvar valca, preto objem jednej je

$V = \pi r^2 \cdot v = 3{,}14 \cdot 3{,}25^2 \cdot 10 \doteq 331{,}66\ \text{cm}^3$.

V jednej plechovke je 95 % polievky,

čo je $0{,}95 \cdot 331{,}66 = 315\ \text{cm}^3 \doteq 315$ ml polievky.

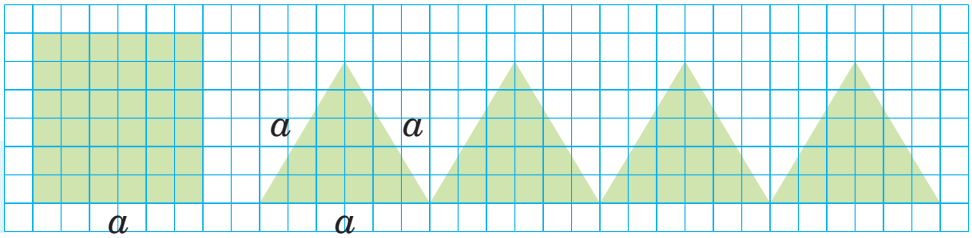
Ak má rok 365 dní, ročne zjedol $315 \cdot 365 = 114\,975$ ml $= 114{,}975$ l polievky.

Za 20 rokov zjedol $114{,}975 \cdot 20 = 2\,299{,}5$ l polievky, teda približne 2 300 litrov.

So žiakmi môžete diskutovať, či započítali aj prestupné roky (vtedy bude odpoveď o $5 \cdot 315 = 1\,575$ ml $= 1{,}575$ l väčšia).

A6 Sieť ihlana sa skladá z podstavy, ktorou je *n*-uholník, a plášťa, ktorý je tvorený trojuholníkmi. Žiaci navrhli na výtvarnej výchove k zadanej štvorcovej podstave rôzne plášte. Budú sa z nich po vystrihnutí naozaj dať poskladať ihlany? Svoje rozhodnutie zdôvodni.

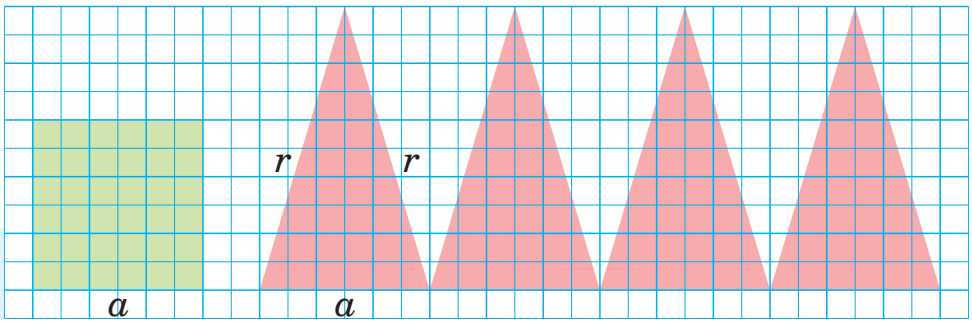
a Ema navrhla plášť zo 4 zhodných rovnostranných trojuholníkov.



- [x] Dá sa poskladať ihlan
- [ ] Nedá sa poskladať ihlan

Základne trojuholníkov majú zhodnú dĺžku so stranami podstavy, teda sa dajú spojiť s podstavou. Aj zvyšné strany trojuholníkov sú zhodné, teda aj susedné trojuholníky sa dajú spojiť a vytvoria tak plášť ihlana.

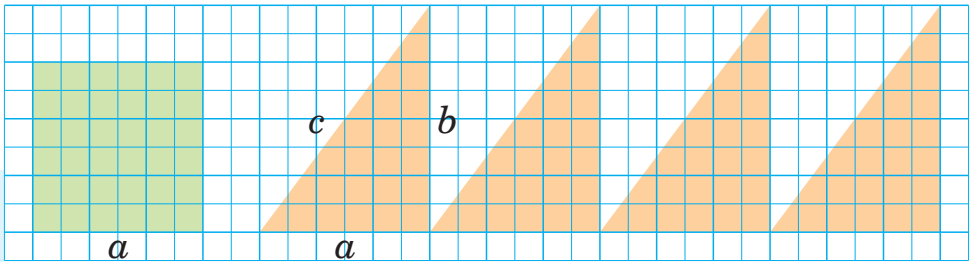
b Lea navrhla 4 zhodné rovnoramenné trojuholníky.



- [x] Dá sa poskladať ihlan
- [ ] Nedá sa poskladať ihlan

Základňa trojuholníkov má zhodnú dĺžku so stranou štvorca, teda sa dajú spojiť s podstavou. Ramená trojuholníkov sú rovnako dlhé, čiže aj susedné trojuholníky sa dajú spojiť a vytvoria tak plášť ihlana.

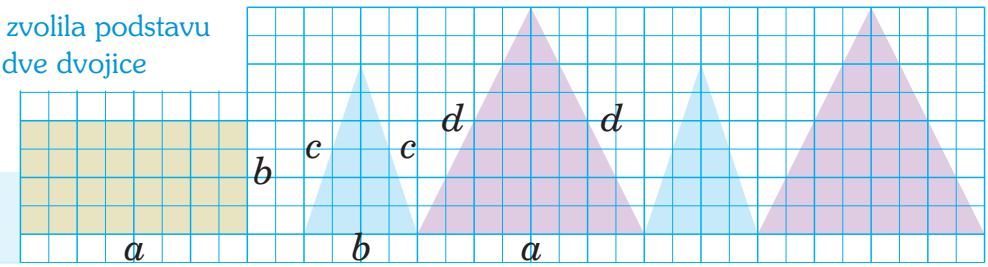
c Klára vytvorila plášť zo 4 zhodných pravouhlých trojuholníkov.



- [ ] Dá sa poskladať ihlan
- [x] Nedá sa poskladať ihlan

Trojuholníky sa síce dajú spojiť s podstavou, keďže odvesna trojuholníka *a* má rovnakú dĺžku ako strana štvorca, ale nedajú sa spojiť navzájom, lebo strany *b* a *c* majú rozdielne dĺžky – nevznikne tak plášť ani vrchol ihlana.

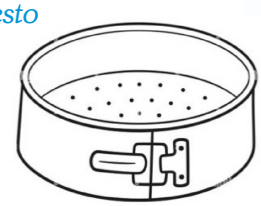
d Betka experimentovala a zvolila podstavu v tvare obdĺžnika a k nej dve dvojice zhodných rovnoramenných trojuholníkov.

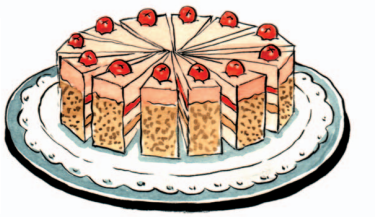


- [ ] Dá sa poskladať ihlan
- [x] Nedá sa poskladať ihlan

Základne trojuholníkov síce korešpondujú s rozmermi podstavy, ale ramená susediacich trojuholníkov majú rôzne dĺžky, takže susedné trojuholníky sa nedajú spojiť – nevznikne tak plášť ani vrchol ihlana.

A7 Na cukrárskom blogu je recept na tortu. V postupe sa píše, že cesto, ktorého bude približne 1 liter, treba naliať do tortovej formy s priemerom 24 cm. Iveta má len formu s priemerom 22 cm, napísala teda do diskusie k receptu otázku: *„Upiekol niekto túto tortu vo forme s priemerom 22 cm?“* Odpovedala jej Žofia: *„Veď to je jedno, pokojne dajte cesto do menšej formy, aspoň bude torta o 2 cm vyššia.“* Je Žofiina rada pravdivá alebo nie? Prečo?





Nie je to pravda.

1 liter cesta je 1 000 cm^3,

vo forme s priemerom 24 cm by siahalo do výšky v, ktorú vypočítame zo vzťahu:

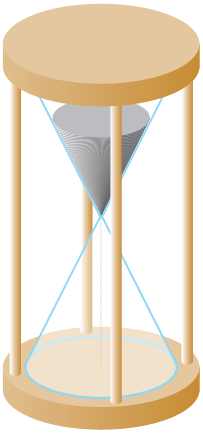
$$1\,000 = \pi \cdot 12^2 \cdot v = \pi \cdot 144 \cdot v \;\rightarrow\; v = \frac{1\,000}{144\pi} \doteq 2{,}21 \text{ cm}.$$

Vo forme s priemerom 22 cm by cesto siahalo do výšky v_1:

$$1\,000 = \pi \cdot 11^2 \cdot v_1 = \pi \cdot 121 \cdot v_1 \;\rightarrow\; v_1 = \frac{1\,000}{121\pi} \doteq 2{,}63 \text{ cm}.$$

Rozdiel výšok nie je 2 cm.

A8 Mišove presýpacie hodiny pozostávajú z dvoch prepojených rovnakých kužeľov, ktorých výška je 8 cm a polomer 3 cm. Keď sa všetok piesok presype z horného kužeľa do dolného, piesok tvorí 80 % objemu kužeľa.



a Je objem piesku v hodinách menší alebo väčší ako 100 cm^3? Zdôvodni odpoveď.

Objem kužeľa je $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 8 = 75{,}36$ cm^3.

Piesok tvorí 80 %, čo bude ešte menej ako 75,36 cm^3,

preto je jeho objem menší ako 100 cm^3.

b Všetok piesok sa z jedného kužeľa presype do druhého za 7 minút. Mišo chcel vedieť, aká to je rýchlosť, no nevedel ako na to. Vypočítaj teda, koľko mm^3 piesku sa v hodinách presype za 1 sekundu.

Výsledok zaokrúhli na celé $\frac{\text{mm}^3}{\text{s}}$.

Objem piesku je 75,36 · 0,8 = 60,288 cm^3 = 60 288 mm^3

7 min = 420 sekúnd,

preto za 1 sekundu to je 60 288 : 420 ≐ 143,54 mm^3 piesku.

Rýchlosť presýpania piesku je približne 144 mm^3/s.

c Ak by sme si chceli vypočítanú rýchlosť lepšie predstaviť, dá sa množstvo piesku, ktoré sa presype za 1 sekundu zobraziť pomocou minikvádra so štvorcovou podstavou s rozmermi 1 × 1 cm. Aká by bola výška tohto kvádra? Vysvetli, ako uvažuješ.

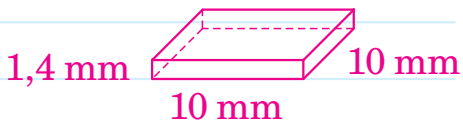
Objem piesku, ktorý sa v hodinách presype za 1 sekundu je 144 mm^3.

Ak by sme ho chceli znázorniť ako kváder so štvorcovou podstavou (1 cm = 10 mm), potom platí:

$V = a \cdot a \cdot v$ a odtiaľ $144 = 10 \cdot 10 \cdot v = 100v$,

z čoho dostaneme $v = 144 : 100 \doteq 1{,}4$ mm.

Výška takého kvádra by bola približne 1,4 mm.



A9 Priemer golfovej loptičky je 4 cm. Chcem vyrobiť škatuľu v tvare kvádra, do ktorej sa zmestí šesť golfových loptičiek, pričom loptičky budú uložené tesne jedna vedľa druhej.
Aké rozmery by mohla mať moja škatuľa? Existuje viac ako jedna odpoveď? Prečo?

Jeden rad
Rozmery škatule:
24 × 4 × 4 cm

Dva rady po tri
Rozmery škatule:
12 × 8 × 4 cm

Žiaci môžu navrhnúť aj „otočené“ riešenia, jeden stĺpec (4×24×4 cm) alebo tri rady po dve (8×12×4 cm).

A10 Rekreačný golfista Alfréd v rozhovore pre lokálnu televíziu povedal:
„Loptičky na golf by mali mať rovnakú hrúbku, ale dvojnásobný polomer, aby sa s nimi ľahšia hralo.“
Reportér pohotovo odpovedal:
„Chápem, mali by tak aj dvojnásobný povrch ako doteraz, iste by sa dali ľahšie trafiť!“
Alfréd sa iba zasmial a ukončil rozhovor. Mal reportér pravdu? Zdôvodni to.

Ak označíme pôvodný polomer loptičky r, povrch bude $S = 4\pi r^2$.
Dvojnásobný polomer je $2r$, povrch bude $S = 4\pi(2r)^2 = 4\pi 4r^2 = 4\pi r^2 \cdot 4$
Povrch bude štvornásobne väčší. Reportér nemal pravdu.

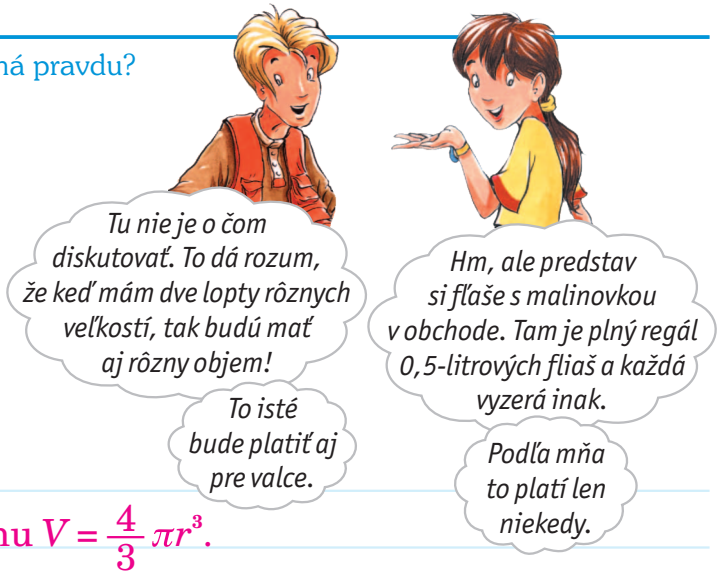
A11 Žiaci diskutovali o pravdivosti tvrdení. Kto má pravdu? Vysvetli prečo a označ platnosť tvrdení.

a Dve gule s rôznymi rozmermi majú rôzny objem.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

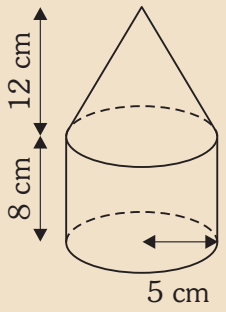
b Dva valce s rôznymi rozmermi majú rôzny objem.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy



Objem gule vypočítame podľa vzťahu $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Jediná premenná vo vzťahu je polomer,
takže pri dvoch rôznych polomeroch vždy dostaneme aj dva rôzne objemy.
Objem valca vypočítame podľa vzťahu $V = \pi r^2 v$.
Objem ovplyvňujú dva rozmery.
Zo skúsenosti vieme, že pre mnohé dvojice r, v budú objemy rôzne.
Existujú však aj také dvojice rozmerov r, v, keď súčin r^2v bude rovnaký.
Napr.: $r = 6$, $v = 1$ potom $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 6^2 \cdot 1 = 36\pi$
$r = 3$, $v = 4$ potom $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi$
Tvrdenie o guliach je pravdivé vždy (chlapec mal teda čiastočne pravdu).
Tvrdenie o valcoch je pravdivé iba niekedy (dievča malo pravdu).

A12 Majo mal na písomke vypočítať povrch telesa na obrázku. Výsledok dopočítať nestihol, ale napísal aspoň výpočet.



$$S = S_1 + S_2$$
$$S = (2\pi r^2 + 2\pi rv) + (\pi r^2 + \pi rs)$$
$$S = (2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 8) + (3{,}14 \cdot 5^2 + 3{,}14 \cdot 5 \cdot 12)$$

a Je jeho výpočet správny? Zdôvodni to.

Správne určil, že teleso pozostáva z valca a kužeľa a správne napísal vzorce na výpočet ich povrchu.
Avšak do celkového povrchu započítal obsah podstavy kužeľa i obsah (vrchnej) podstavy valca, ktoré netvoria povrch telesa na obrázku.
Nesprávne určil aj dĺžku strany kužeľa (12 cm), pričom 12 cm je výška kužeľa.
Teda jeho výpočet nie je úplne správny.

b Žiaci si cez prestávku porovnávali výsledky. Iva povedala, že si výsledok presne nepamätá, ale bolo to okolo 530 cm². Je to blízko správneho výsledku? Ako to vieš?

Pytagorova veta pre dĺžku strany kužeľa: $s = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

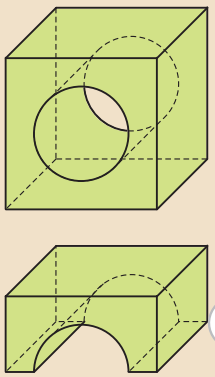
Povrch telesa na obrázku: $S = (\pi r^2 + 2\pi rv) + (\pi rs)$

$S = (3{,}14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 8) + (3{,}14 \cdot 5 \cdot 13)$

$S = 78{,}5 + 251{,}2 + 204{,}1 = 533{,}8$ cm²

Ivin zaokrúhlený výsledok 530 cm² je blízko správneho výsledku 533,8 cm².

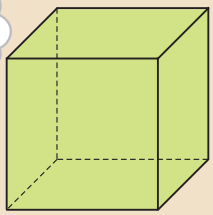
A13 DÚ:
Vypočítajte objem aj ďalších skladačiek z Jurkovej stavebnice.



Na hodine sme počítali toto:

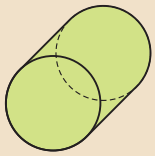
Kde mám nájsť vzorce na objem, keď ani neviem, ako sa také telesá volajú? Deravé kocky?

$a = 8$ cm



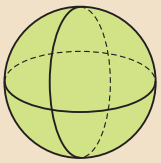
$V = a \cdot a \cdot a$
$V = 8 \cdot 8 \cdot 8$ cm³
$V = 512$ cm³

$r = 2{,}5$ cm
$v = 8$ cm



$V = \pi r^2 v$
$V = 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot 8$
$V = 157$ cm³

$r = 4$ cm



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^3$
$V = 267{,}95$ cm³

Nemusí byť pre každé teleso samostatný vzorec, to by ich bolo strašne veľa!

Má otec pravdu, dajú sa výpočty zo školy použiť pri riešení domácej úlohy? Ak áno, vysvetli ako a domácu úlohu vyrieš.

Áno, otec má pravdu.

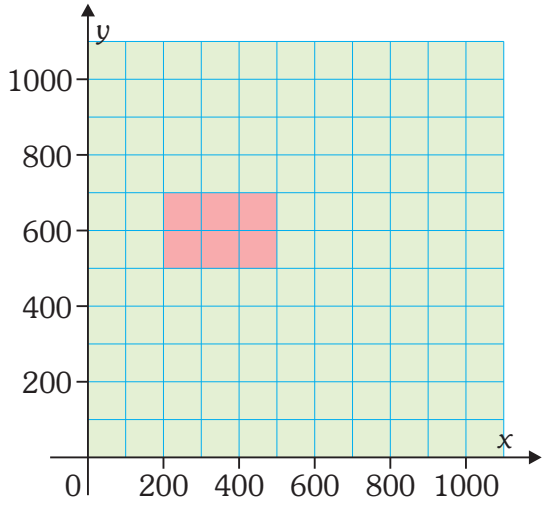
1. teleso .... od objemu kocky stačí odpočítať objem valca: $V = 512 - 157 = 355$ cm³

2. teleso .... je to polovica prvého telesa: $V = 355 : 2 = 177{,}5$ cm³

Netreba nové vzorce, stačí správne skombinovať už vypočítané objemy telies.

7 Funkcie

A1 Dron detekoval v lese nelegálnu stavbu a do kontrolného úradu poslal mapku oblasti zasadenú do súradnicového systému. Urč súradnice stredu tejto nelegálnej stavby. Vysvetli svoj postup.

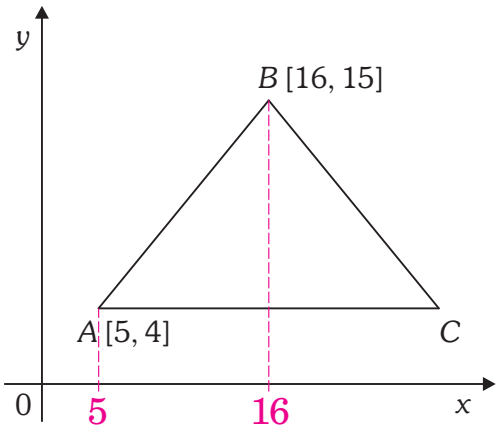


x-ové súradnice dolných rohov stavby sú 200 a 500, teda stavba je dlhá 300 jednotiek. Stred bude mať preto x-ovú súradnicu $200 + (300 : 2) = 200 + 150 = 350$.

y-ové súradnice pravých (ľavých) rohov stavby sú 500 a 700, teda stavba je široká 200 jednotiek. Stred bude mať preto y-ovú súradnicu $500 + (200 : 2) = 500 + 100 = 600$.

Stred stavby má súradnice [350, 600].

A2 Žiaci mali na písomke určiť na obrázku súradnice bodu C, ktorý je vrcholom rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AC, ktorá je rovnobežná s osou x. Svoje riešenie mali zdôvodniť.



a Kto mal správne riešenie a prečo?

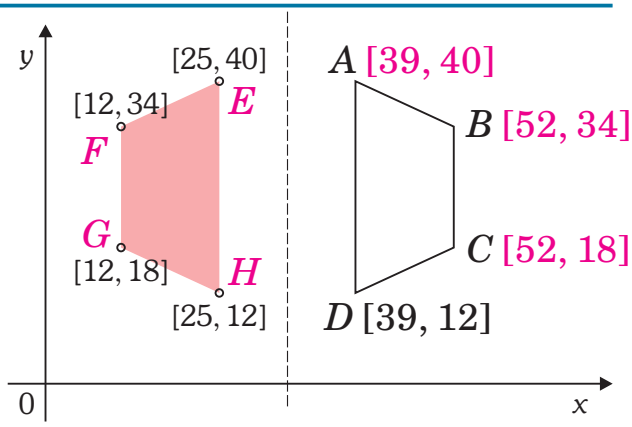
Správne riešenie mal Hugo, lebo súradnice sa dajú určiť:
y-ová súradnica bodu C je rovnaká ako y-ová súradnica bodu A, teda 4;
bod B leží na kolmici prechádzajúcej stredom AC, keďže AC je základňa a ABC je rovnoramenný trojuholník, preto má stred AC súradnice [16, 4] a teda polovica úsečky AC je dlhá 11 jednotiek;
x-ová súradnica bodu C musí byť $5 + 2 \cdot 11 = 5 + 22 = 27$.

b Koľko bodov by im mala pani učiteľka za odpovede prideliť, ak bola táto úloha za 2 body? Svoju odpoveď zdôvodni.

Viki 0, lebo nemá pravdu,
Hugovi 1, lebo mu chýba zdôvodnenie.

Diskutujte so žiakmi, koľko pridelili bodov a prečo. Zdôraznite, že zdôvodnenie je rovnako dôležité ako odpoveď.

A3 Urč chýbajúce súradnice bodov A, B a C, ktoré Julo dostal zobrazením červeného lichobežníka v osovej súmernosti podľa naznačenej osi, ak vieš, že súradnice bodu D Julo určil správne. Vysvetli svoju úvahu.



Červený lichobežník nazveme $EFGH$.

Body E a H majú rovnaké x-ové súradnice, ležia teda kolmo nad sebou.

Preto aj bod A bude mať rovnakú x-ovú súradnicu ako D (čo je 39), keďže D je obrazom H a A je obrazom E.

y-ová súradnica bodu A je 40, pretože A leží na kolmici na os súmernosti, ktorá je rovnobežná s osou x, a teda všetky body ležiace na nej majú rovnakú y-ovú súradnicu.

Podobne to platí pre body B a C, ich y-ové súradnice sú rovnaké ako y-ové súradnice ich vzorov F a G.

Výška lichobežníka $EFGH$ je 13 (je to vzdialenosť medzi stranami EH a FG, ktorú určíme ako 25 – 12). Takú istú výšku má aj lichobežník $ABCD$.

Potom x-ová súradnica bodov B a C je: 39 + 13 = 52.

A4 V rozprávke si mal chudobný Jano vybrať jedno z dvoch zázračných zlatých vajec.
Prvé vážilo 1,2 g a jeho hmotnosť sa každý deň zdvojnásobovala.
Druhé vážilo 125 g a každý deň sa jeho hmotnosť zväčšovala o 0,01 kg.

a Ktoré vajce si mal podľa teba Jano vybrať? Prečo?

Deň	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Hmotnosť 1. vajca [g]	1,2	2,4	4,8	9,6	19,2	38,4	76,8	153,6	307,2
Hmotnosť 2. vajca [g]	125	135	145	155	165	175	185	195	205

Mal by si vybrať prvé vajce, lebo počnúc 9. dňom bude ťažšie ako druhé vajce.

b Urč hmotnosť m druhého vajca v gramoch po 10, 20 a 30 dňoch.

Očakávame, že žiaci si v tabuľke všimnú, že hmotnosť prvého vajca rastie rýchlejšie. Ak si to nevšimli, spýtajte sa ich, koľko budú vážiť obe vajcia po 9, 10,... dňoch.

Po 10 dňoch: $m = 125 + 9 \cdot 10 = 125 + 90 = 215$ g

Po 20 dňoch: $m = 125 + 19 \cdot 10 = 125 + 190 = 315$ g

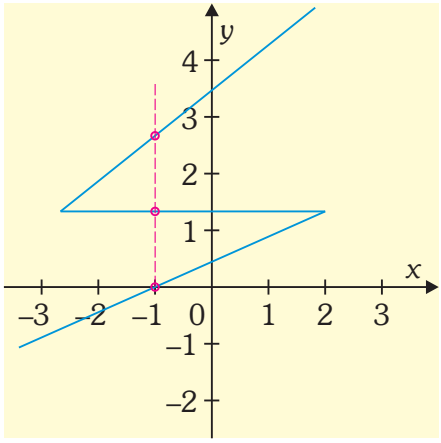
Po 33 dňoch: $m = 125 + 32 \cdot 10 = 125 + 320 = 445$ g

c Napíš výraz, pomocou ktorého vypočítaš hmotnosť m druhého vajca v gramoch po n dňoch.

$m = 125 + (n - 1) \cdot 10$

A5 Žiaci mali určiť, či je na obrázku graf funkcie. Rozvírila sa diskusia.

Saša: *„Áno, veď sú to tri spojené čiary a čiary, sme si hovorili, funkciami sú.“*
Ondrej: *„Ale nie všetky čiary sú funkcie, vertikálna čiara funkciou nie je.“*
Maťo: *„Veď taká tam nie je! A okrem toho, je to ako z Harryho Pottera, takže to určite funkcia je.“*
Ondrej: *„Ty si celý Harry Potter! Akú hodnotu má tvoja funkcia v bode –1?“*



a Čo by mal Maťo odpovedať Ondrejovi?

Hodnota v bode –1 je 0, ale aj 1,4 a aj 2,5 (približne).

b Je na obrázku graf funkcie? Nie.

c Doplň nasledujúce Ondrejovo tvrdenie tak, aby bolo pravdivé.

Ak je v grafe čo len k jednému číslu na x-ovej osi priradených viacero rôznych hodnôt na y-ovej osi, takýto graf nie je grafom funkcie.

A6 Na jeseň treba odčerpať vodu z bazéna. Pán Homolka, člen Slovenskej akadémie vied, vytvoril minulý rok model opisujúci rýchlosť odčerpávania vody zo svojho bazéna predpisom $\boldsymbol{V = 14\,000 - 3\,500t}$, kde $\boldsymbol{V}$ reprezentuje množstvo vody v bazéne v litroch a $\boldsymbol{t}$ čas od začiatku odčerpávania v hodinách.

a Koľko vody je v bazéne pred jeho vypustením? Dá sa to z predpisu určiť? Zdôvodni to.

Áno, je to 14 000 litrov, je to hodnota V (množstvo vody) v čase $t = 0$.

b O koľko litrov klesne množstvo vody v bazéne za jednu hodinu? Ako to vieš?

O 3 500 litrov, lebo keď za t dosadíme 1, 14 000 sa zmenší o 3 500.

c Ako dlho bude trvať, kým sa bazén vyprázdni?

Za každú hodinu množstvo vody klesne o 3 500 litrov.

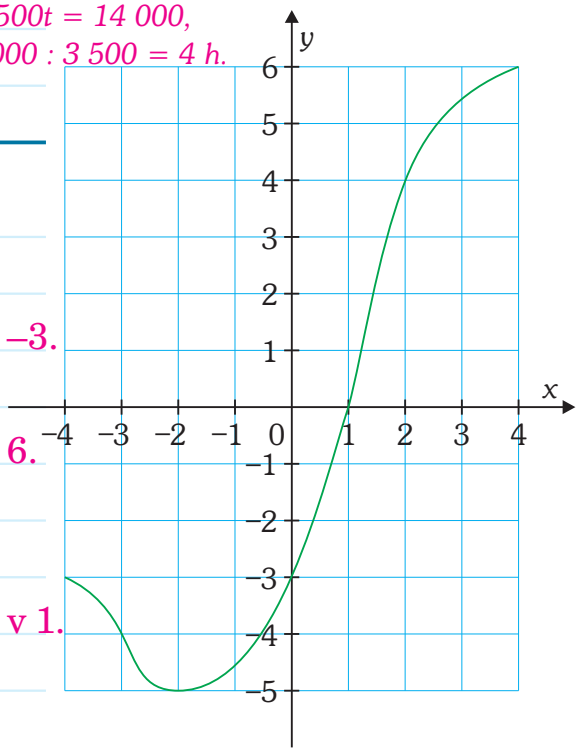
14 000 : 3 500 = 4

Bazén sa vyprázdni za 4 hodiny.

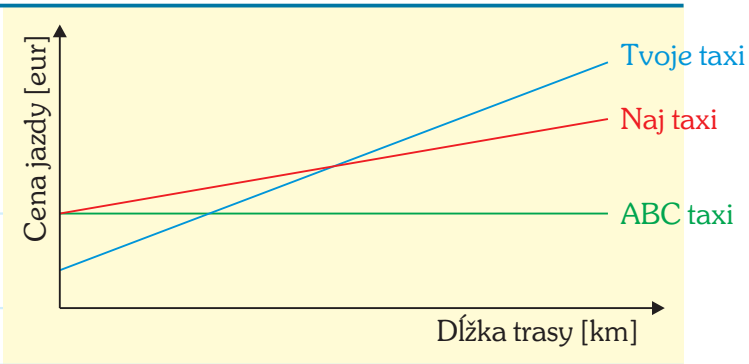
Iné riešenie:
Množstvo vody V prázdneho bazéna je 0 litrov, preto stačí vyriešiť rovnicu 0 = 14 000 – 3 500t. Dostaneme 3 500t = 14 000, odtiaľ t = 14 000 : 3 500 = 4 h.

A7 Na obrázku je graf funkcie f. Rozhodni o pravdivosti tvrdení. Ak je tvrdenie nepravdivé, vysvetli prečo.

1. Hodnota funkcie v bode –4 je –3. **pravda – nepravda**
2. Hodnota funkcie v bode 0 je 1. **pravda – nepravda** Je to –3.
3. Hodnota funkcie v bode –3 je –4. **pravda – nepravda**
4. Najväčšia hodnota funkcie je 4. **pravda – nepravda** Je to 6.
5. Najmenšia hodnota funkcie je –5. **pravda – nepravda**
6. Bod [2, 4] leží na grafe funkcie. **pravda – nepravda**
7. Graf pretína os x v –3. **pravda – nepravda** Je to v 1.



A8 Tri taxislužby vypočítavajú náklady na jazdu rôznymi spôsobmi. Pán Drahoš absolvoval veľa jázd s každou z nich a vždy zaznamenal dĺžku trasy (v kilometroch) a náklady na jazdu (v eurách). Údaje znázornil v jednom grafe.



a V čom sú rovnaké a v čom sa odlišujú spôsoby, akými taxislužby stanovujú náklady na jazdu?

Rovnaké:

Nezačína sa na nule, všetky tri si účtujú poplatok za to, že taxík príde.

V *Naj taxi* a *Tvoje taxi* cena jazdy závisí od dĺžky trasy (stále sa zväčšuje).

Odlišné:

V *ABC* cena jazdy nezávisí od najazdených kilometrov, stále sa platí rovnako.

b Ktorú taxislužbu si vyberieš, ak si chceš rezervovať taxík na cestu? Svoje rozhodnutie zdôvodni.

Na dlhšie jazdy sa oplatí *ABC taxi*, vtedy platím menej, lebo cena nazávisí od prejdených kilometrov. Na kratšie jazdy *Tvoje taxi*, lebo štartovné je najnižšie a kým sa modrý graf pretne so zeleným, platím najmenej.

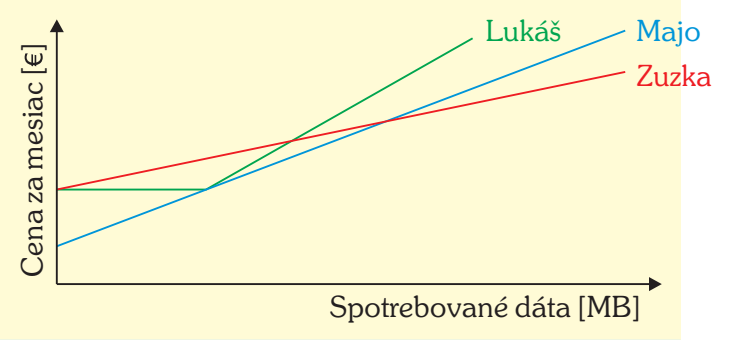
Diskutujte so žiakmi, ktorú taxislužbu by si vybrali a prečo. Doplňujúce otázky: Ktorá taxislužba si účtuje najviac za jeden km? Ako to zistili? Ktorú z taxislužieb by chceli vlastniť a prečo?...

A9 Traja mobilní operátori majú rôzne ceny za mesačné programy. Zuzka, Majo a Lukáš majú uzavreté zmluvy s týmito operátormi. Každý mesiac si zaznamenávali, koľko megabajtov (MB) dát spotrebovali a koľko eur zaplatili. Údaje znázornili do grafu.

Operátor *Lemon* si účtuje poplatok 5 € a k tomu 0,02 centa za každý použitý MB dát.

Operátor *Trojka* si účtuje poplatok 7 € a k tomu 0,01 centa za každý použitý MB dát.

Operátor *Z-mobile* si účtuje poplatok 7 €, prvých 100 Mb dát ponúka bezplatne a potom za každý použitý MB dát 0,03 centa.



a S ktorým operátorom má podľa teba každý z nich uzavretú zmluvu? Svoju odpoveď zdôvodni.

Lukáš má zmluvu so Z-mobile, lebo za prvých 100 MB neplatí, na (zelenom) grafe to je vodorovná čiara.

Zuzka má zmluvu s *Trojkou*, lebo poplatok je 7 eur, čo je rovnako veľa ako má *Z-mobile* (červený a zelený graf sa začínajú na rovnakej hodnote).

Majo má zmluvu s *Lemonom*, lebo poplatok je najnižší (modrý graf sa začína na hodnote nižšej ako zvyšné dva grafy).

b Ktorého operátora si vyberieš a prečo?

Žiadame od žiakov argumentáciu.
Chceme dosiahnuť to, aby si uvedomili, že cena závisí najmä od množstva minutých dát.
Ak mesačne míňajú veľa dát (viac ako 200 MB), najvýhodnejšia je Trojka, lebo má najnižšiu cenu za MB.

A10 Žiaci mali napísať čo najviac pravdivých tvrdení o lineárnej funkcii. Sofia napísala tri:

1. *Grafom lineárnej funkcie je hocijaká priamka.*
2. *Pre každú lineárnu funkciu platí, že jej funkčné hodnoty sa rovnomerne zväčšujú alebo zmenšujú stále o to isté číslo.*
3. *Lineárna funkcia sa volá lineárna, lebo jej grafom je priamka a tá sa po latinsky povie LINEA.*

a Ktoré Sofiine tvrdenia sú pravdivé?
Ak je niektoré nepravdivé, vysvetli, prečo je to tak.

Pravdivé: 2 a 3.

Nepravdivé: 1, lebo zvislá priamka (kolmá na os x) nie je grafom žiadnej funkcie.

b Napíš ešte aspoň jedno ďalšie pravdivé tvrdenie o lineárnej funkcii.

V diskusii skontrolujte žiacke tvrdenia a nechajte ostatných žiakov potvrdiť ich pravdivosť.
Možné tvrdenia sú o priesečníkoch grafu so súradnicovými osami alebo kedy je funkcia rastúca/klesajúca/konštantná atď.

A11 Funkcie f a g sú zadané tabuľkou.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	512	128	32	8	2	0,5	0,25
$g(x)$	18	16	14	12	10	8	6

a Doplň chýbajúce funkčné hodnoty pre obe funkcie.

b Ktorá z funkcií je lineárna? Ako to vieš?

Lineárna je funkcia g,
lebo každá ďalšia hodnota je vždy o 2 menšia ako predchádzajúca.
Keby sme si hodnoty nakreslili do grafu, ležali by na priamke.
Funkcia f nie je lineárna, lebo jej hodnoty sa nezmenšujú stále o to isté číslo.

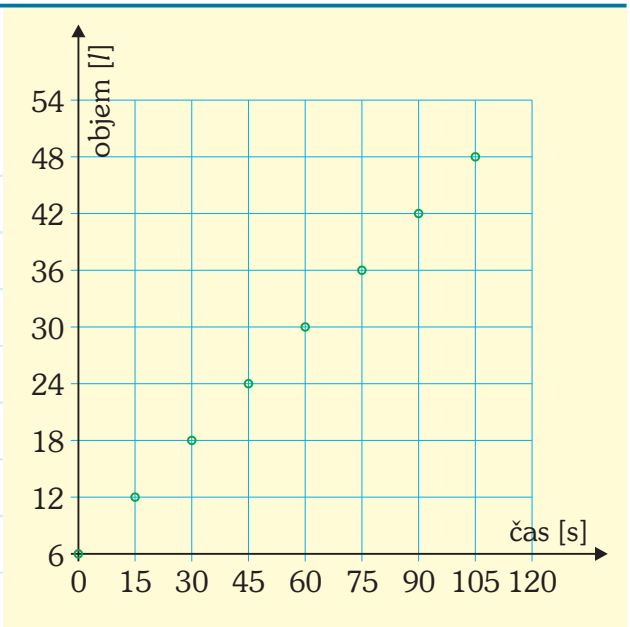
A12 Rozhodni, či body [–2, 1] a [3, 10] ležia na grafe lineárnej funkcie f s predpisom $y = 2x + 5$. Svoju odpoveď zdôvodni.

Aby body ležali na grafe, musí platiť rovnosť, ktorú dostaneme, ak ich súradnice dosadíme do predpisu funkcie.

Overenie pre bod [–2, 1]:
$1 = 2 \cdot (-2) + 5$
$1 = -4 + 5$
$1 = 1$
Preto bod [–2, 1] leží na grafe funkcie f.

Overenie pre bod [3, 10]:
$10 = 2 \cdot 3 + 5$
$10 = 6 + 5$
$10 \neq 11$
Preto bod [3, 10] neleží na grafe funkcie f.

A13 Na obrázku je znázornené množstvo nafty v nádrži auta pri tankovaní v závislosti od času. Čas sa meral od začiatku plnenia nádrže až po jej úplné naplnenie.



a Koľko litrov nafty bolo v nádrži pred tankovaním?

6 litrov

b Koľko litrov nafty bolo v nádrži po 15 sekundách?

12 litrov

c Koľko sekúnd trvalo celé tankovanie nafty?

105 sekúnd

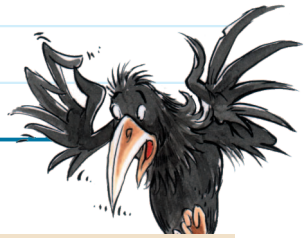
d Aká bola rýchlosť tankovania v l/s? Zdôvodni to.

Z grafu vidno, že za každých 15 sekúnd pribudlo 6 litrov nafty.
Za 1 sekundu to je teda 15krát menej, teda 6 : 15=0,4
Rýchlosť tankovania bola 0,4 litra za sekundu.

e Na ktorej kartičke je správny predpis lineárnej funkcie *f* opisujúcej túto situáciu? Svoj výber zdôvodni.

$f: y = 0{,}4 + 6x$	$f: y = 6x$	$f: y = 6 + 6x$	$f: y = 15x$	$f: y = 0{,}4x + 6$

Ak za x dosadíme čas v sekundách, y bude množstvo nafty v nádrži. Pre hodnotu 15 sekúnd musí byť y rovné 12, pre 30 sekúnd musí byť y rovné 18 atď. Toto platí len pre sivú kartičku.



A14 Ivo zaspal nad domácou úlohou, v ktorej mal napísať postup zostrojenia grafu lineárnej funkcie $f: y = 3x + 2$.

a Dokonči Ivov chýbajúci text tak, aby bol správny.

Grafom bude priamka, na jej zostrojenie mi stačia dva body. Napríklad pre $x = 1$ a $x = 2$ sú funkčné hodnoty $y = 5$ a $y = 8$. Body [1, 5] a [2, 8] znázorním do súradnicovej sústavy a zostrojím priamku, ktorá cez ne prechádza.

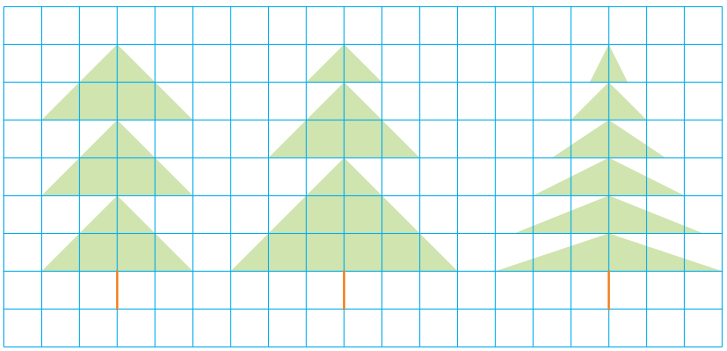
b Prečítaj si postup Ivovho spolužiaka Mira. Je Mirov postup správny, hoci je iný ako Ivov? Zdôvodni to.

Priesečník grafu tejto funkcie s osou y je bod [0, 2], lebo keď za x dosadím 0, dostanem 2.
Priesečník s osou x je bod $[-\frac{2}{3}, 0]$, lebo keď za y dosadím 0, dostanem $-\frac{2}{3}$.
Cez tieto dva body narysujem priamku a tá bude grafom funkcie f.

Aj Mirov postup je správny, on narysuje priamku cez body [0, 2] a $[-\frac{2}{3}, 0]$, kým Ivo cez body [1, 5] a [2, 8]. Je jedno, pomocou ktorých bodov priamku zostrojili, obaja dostanú tú istú pramku, lebo vychádzali z toho istého predpisu a správne určili body ležiace na grafe.

8 Podobnosť trojuholníkov

A1 Pani učiteľka Monika je známa tým, že dokáže do každej témy „natlačiť“ kúsok matematiky. Nebolo to inak ani pred Vianocami, keď prišla s úlohou o matematických vianočných stromčekoch. Na obrázku sú tri druhy stromčekov. Ktorý z nich vznikol z navzájom podobných trojuholníkov? Ktoré z detí má pravdu? Zdôvodni to.



Julo: *„Podľa mňa všetky tri, veď všetky tie trojuholníky sa na seba podobajú.“*

Mišo: *„Skoro si sa trafil... posledné dva stromčeky sú z podobných trojuholníkov. Všetky trojuholníky sú rovnoramenné a postupne sa zväčšujú.“*

Katka: *„Počkajte, musia sa vždy zväčšovať alebo zmenšovať?“*

Nela: *„Nemá tretí strom nejaké čudné trojuholníky? Keď sa na to tak pozriem, tak sa zväčšujú, ale veľmi sa mi nepodobajú... neviem, ako to presne povedať.“*

Dva trojuholníky sú podobné podľa vety sss, ak sú dĺžky prislúchajúcich si strán v rovnakom pomere.

Prvý stromček má trojuholníky rovnaké, strany sú v pomere 1 : 1, čo je špeciálny prípad podobnosti – zhodnosť.

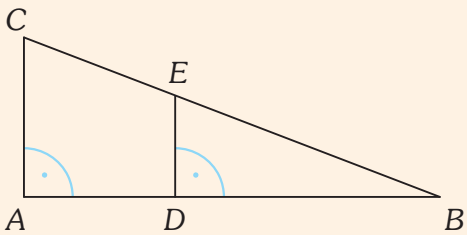
V druhom stromčeku má prostredný trojuholník 2-krát dlhšie strany ako horný trojuholník a dolný trojuholník zase 3-krát dlhšie strany. Čiže ide o zväčšenie spĺňajúce podmienku vety *sss*.

Pri treťom stromčeku sa síce základňa trojuholníkov smerom nadol rovnomerne zväčšuje, ale ich výška sa v rovnakom pomere nezväčšuje. Všetky trojuholníky majú výšku 1 strana štvorčeka, preto nemôžu byť podobné.

Z navzájom podobných trojuholníkov sú zložené len prvé dva stromčeky.

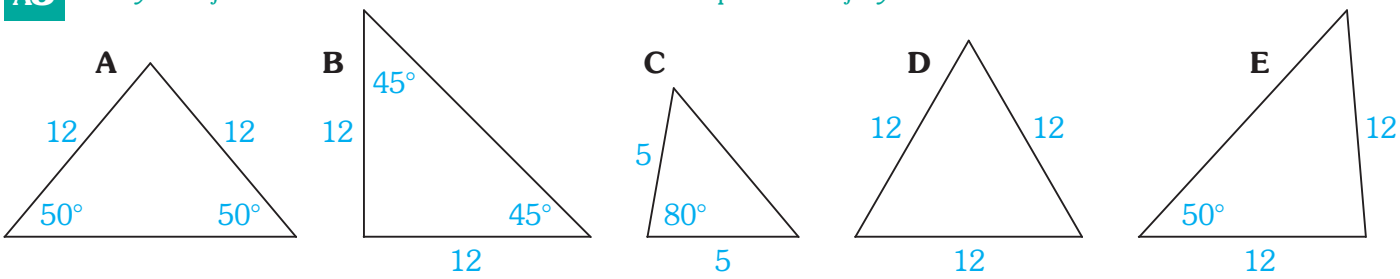
Z uvedených žiackych vyjadrení nie je žiadne (úplne) pravdivé.

A2 Juro na písomke nestihol dopísať zdôvodnenie, prečo sú pravouhlé trojuholníky *ABC* a *DBE* na obrázku podobné. Dokonči jeho zdôvodnenie.



1. $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EDB| = 90°$
2. $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DBE|$, lebo je to spoločný uhol trojuholníkov.
3. Keďže sa trojuholníky zhodujú v dvoch uhloch, sú podobné (podľa vety *uu*).

A3 Ktorý z trojuholníkov na obrázku medzi ostatné nepatrí? Svoj výber zdôvodni.

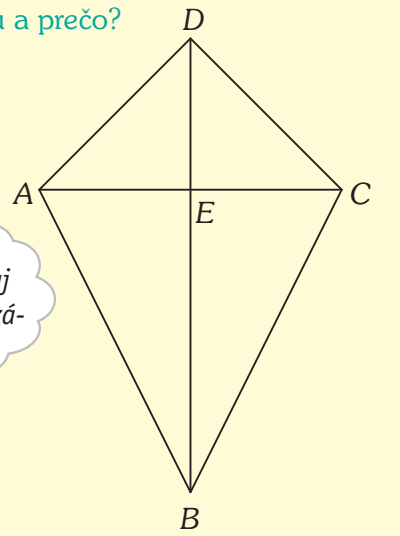


Napr. D, lebo je rovnostranný, ostatné sú iba rovnoramenné.

Napr. B, lebo je pravouhlý, ostatné sú ostrouhlé.

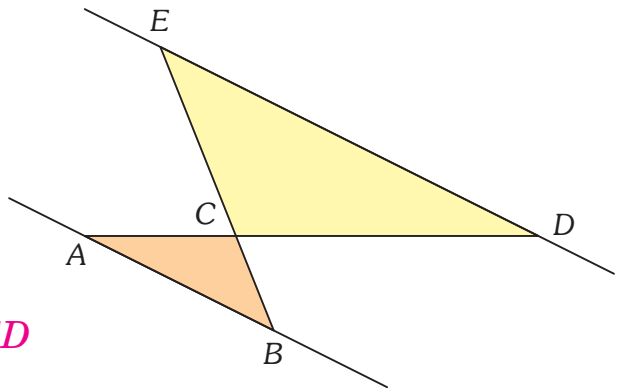
Žiaci môžu prísť aj s inými odpoveďami, musia však správne argumentovať.

A4 Úsečka *BD* leží na osi úsečky *AC* štvoruholníka *ABCD*. Kto má pravdu a prečo?



Pravdu má iba Dana, lebo trojuholníky *AED* a *CED* sú zhodné a aj *AEB* a *CEB* sú zhodné, teda aj podobné. Jednu stranu majú spoločnú a tým, že *BD* leží na osi úsečky *AC*, *AE* je rovnako dlhá ako *EC* (lebo os úsečky ju delí na polovicu). Naviac, trojuholníky *ACD* a *ABC* sú rovnoramenné (lebo na osi úsečky ležia body rovnako vzdialené od jej koncových bodov), teda $|AD| = |DC|$ a $|AB| = |BC|$. *AED* nie je podobný s *CEB*, lebo jedna dvojica strán je zhodná (*AE* s *EC*) a zvyšné nie sú. Preto Rasťo a ani Mia pravdu nemajú.

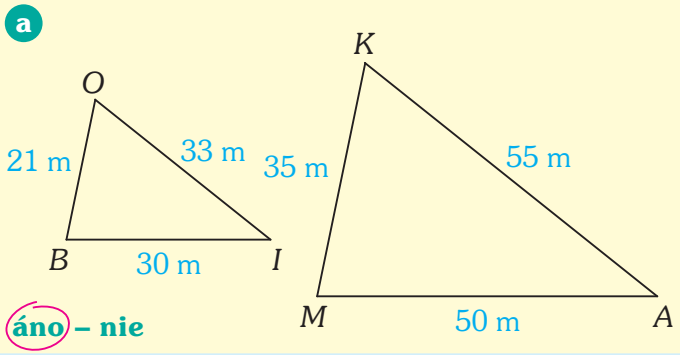
A5 Zdôvodni, prečo sú trojuholníky *ABC* a *DEC* podobné, ak vieš, že úsečka *AB* je rovnobežná s úsečkou *DE*.



Uhly pri vrchole *C* sú v oboch trojuholníkoch zhodné, lebo sú to vrcholové uhly. Uhol pri vrchole *A* je zhodný s uhlom pri vrchole *D*, lebo sú to striedavé uhly pri rovnobežkách, keďže *AB* je rovnobežné s *ED* (rovnobežky *AB*, *ED* sú preťaté priečkou *AD*). Trojuholníky sú preto podobné podľa vety *uu*.

A6 Pre každú dvojicu trojuholníkov rozhodni, či sú **podobné**, a zdôvodni, prečo je to tak.

a

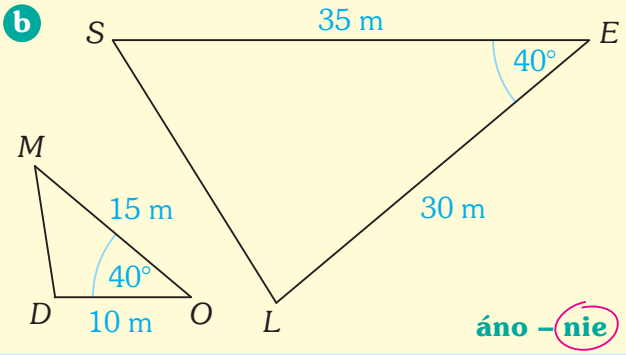


áno – nie

Lebo majú rovnaký pomer každej dvojice strán (veta *sss*)

$\frac{55}{33} = \frac{50}{30} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$

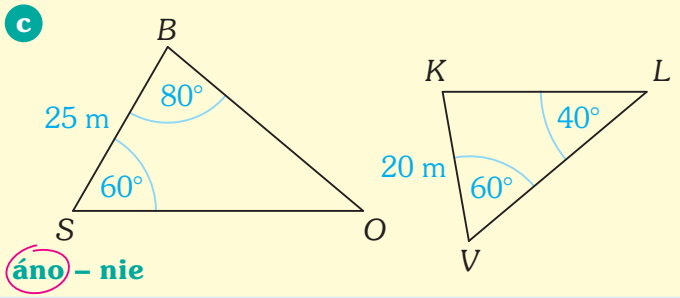
b



áno – nie

Lebo nesedí pomer strán, $\frac{35}{15} \neq \frac{30}{10}$.

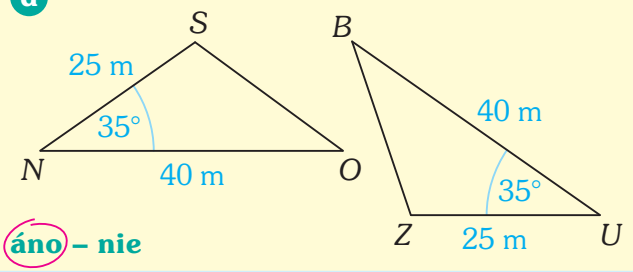
c



áno – nie

Lebo oba majú veľkosti uhlov 60°, 40° a 80° (veta *uu*).

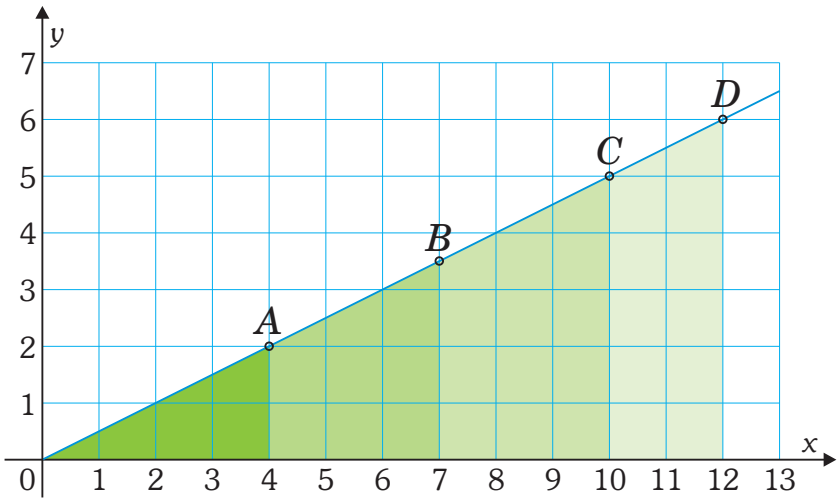
d



áno – nie

Lebo sú zhodné.

A7 V súradnicovej sústave sú zobrazené štyri trojuholníky, ktoré sa prekrývajú.



a Sú tieto trojuholníky podobné? Svoju odpoveď zdôvodni.

Áno, lebo uhol pri priesečníku súradnicových osí je spoločný a všetky trojuholníky sú pravouhlé. Sú preto podobné podľa vety *uu*.

b Urč súradnice bodov *A*, *B*, *C*, *D*.

A[4, 2] *B*[7; 3,5] *C*[10, 5] *D*[12, 6]

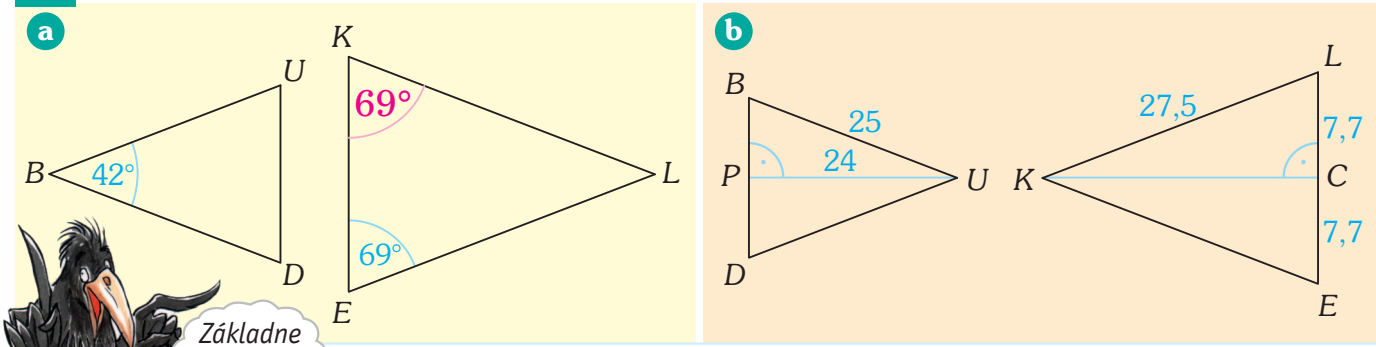
c Aký je vzťah medzi *x*-ovou a *y*-ovou súradnicou týchto bodov?

x-ová je dvojnásobkom *y*-ovej/*y*-ová je polovicou *x*-ovej

d Napíš predpis modrej priamky.

$y = \frac{1}{2}x$

A8 Rozhodni, či sú rovnoramenné trojuholníky *DUB* a *KEL* podobné. Rozhodnutie zdôvodni.



a) V rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základniach zhodné. V trojuholníku *DUB* majú veľkosť: (180°– 42°) : 2 = 69°, tak isto aj v trojuholníku *KEL*. Trojuholníky sú preto podľa vety *uu* podobné.

b) Výška delí rovnoramenné trojuholníky na polovicu, preto stačí overiť, či je pomer dĺžok odvesien v pravouhlých trojuholníkoch *PUB* a *KCL* rovnaký. Dĺžku odvesien *KC* a *PB* vypočítame z pravouhlého trojuholníka *KCL* (resp. *PUB*) podľa Pytagorovej vety: $|KC| = \sqrt{27{,}5^2 - 7{,}7^2} \rightarrow |KC| = 26{,}4$

$|PB| = \sqrt{25^2 - 24^2} \rightarrow |PB| = 7$

Teraz overíme pomery: $\frac{|KC|}{|PU|} = \frac{26{,}4}{24} = 1{,}1$; $\frac{|LC|}{|PB|} = \frac{7{,}7}{7} = 1{,}1$.

Keďže pomery sú zhodné, trojuholníky sú podobné.

A9 Rozhodni, či nasledujúce tvrdenia platia **vždy, niekedy** alebo **nikdy**. Rozhodnutia zdôvodni.

a Dva rovnostranné trojuholníky sú podobné.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo majú všetky vnútorné uhly veľkosti 60° (veta *uu*).

b Dva pravouhlé trojuholníky sú podobné.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo existujú pravouhlé trojuholníky, ktorých vnútorné uhly nie sú rovnaké, napr. 90, 60, 30 a 90, 70, 20. Aby boli podobné, museli by sa zhodovať v dvoch uhloch.

c Dva rovnoramenné trojuholníky sú podobné.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo existujú rovnoramenné trojuholníky, ktorých vnútorné uhly nie sú rovnaké, napr. 50, 50, 80 a 55, 55, 70. Aby boli podobné, museli by sa zhodovať v dvoch uhloch.

d Dva rovnoramenné pravouhlé trojuholníky sú podobné.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo keďže sú pravouhlé a rovnoramenné, jeden uhol má 90° a zvyšné dva musia byť rovnaké, t. j. oba majú veľkosť 45°. Platí to vo všetkých rovnoramenných pravouhlých trojuholníkoch, preto sú všetky podobné podľa vety *uu*.

9 Štatistika

A1 Otec pomáha Marekovi s prípravou na *Testovanie 9*.
Každý týždeň mu pripraví cvičný test a keď si náhodou niečo nepamätá, tak sa mu to snaží vysvetliť.
Na zlepšenie nálady im starká upiekla koláč a zapojila sa do debaty.

Ako vysvetlíš Marekovej starkej, čo znamená *relatívna početnosť*? Boli Marekove výsledky tento týždeň lepšie alebo horšie?

Porovnávať iba počet (ne)správne vyriešených úloh má zmysel vtedy, ak by mal test každý týždeň rovnako veľa úloh.
Keďže celkový počet úloh sa mení, tak Marekovu úspešnosť musíme porovnať pomocou relatívnej početnosti, čo je pomer počtu (ne)správne vypočítaných úloh k počtu všetkých úloh v teste.
Relatívna početnosť nesprávne vypočítaných úloh je tento týždeň 6 : 15 = 0,4 a predchádzajúci týždeň bola 8 : 20 = 0,4 alebo 10 : 20 = 0,5.
Keďže si Marek nepamätá presný počet nesprávne vyriešených úloh minulý týždeň, nedá sa povedať, či mu to ide lepšie.

A2 Ktorý štatistický súbor nepatrí medzi ostatné? Svoj výber zdôvodni.

A: 1, 1, 1, 2, 3, 4 | **B:** 1, 1, 1, 1, 2, 6 | **C:** 1, 1, 2, 3, 4, 5 | **D:** 1, 2, 2, 3

Môže to byť súbor D,
lebo jeho rozsah je len 4, ostatné majú rozsah 6.
Môže to byť súbor C,
ktorého aritmetický priemer je približne 2,67, ostatné majú priemer 2.

Žiaci môžu argumentovať napr. aj tak, že je to súbor B,
lebo štatistický znak ostatných by mohli byť známky, ale v B je štatistická jednotka 6.
Vždy vyžadujte zdôvodnenie.

A3 Priemer piatich čísel je 10. Tri z nich sú 10, 10 a 10.

a Aké by mohli byť zvyšné dve čísla? Uveď aspoň 3 možnosti. Ako vieš, že tvoje riešenie je správne?

Mohli by to byť čísla 10 a 10 alebo 11 a 9 alebo 12 a 8.

Overenie správnosti: $\frac{5 \cdot 10}{5} = \frac{50}{5} = 10$ $\quad \frac{3 \cdot 10 + 11 + 9}{5} = \frac{30 + 20}{5} = \frac{50}{5} = 10$ $\quad \frac{3 \cdot 10 + 12 + 8}{5} = \frac{30 + 20}{5} = \frac{50}{5} = 10$

b Čo sa dá s určitosťou povedať o zvyšných dvoch číslach? Ako to vieš?

S určitosťou sa dá povedať,
že súčet zvyšných dvoch čísel je 20 (aj že ich priemer je 10).
Označme zvyšné dve čísla x a y. Keďže celkový priemer je 10, potom platí:

$$10 = \frac{10 + 10 + 10 + x + y}{5} = \frac{30 + x + y}{5} \quad / \cdot 5$$
$$50 = 30 + x + y \quad / - 30$$
$$20 = x + y$$

To znamená, že ich súčet je 20 a ich priemer je $(x + y) : 2 = 20 : 2 = 10$.

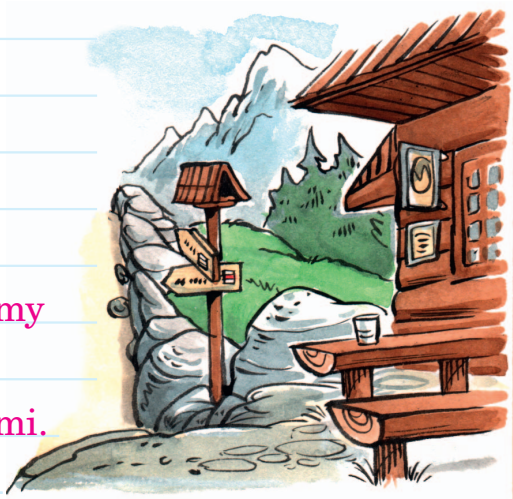
A4 Na horskej chate budú ubytovaní šiesti hostia prostredníctvom cestovnej kancelárie.
Animátor chcel vedieť ich priemerný vek, aby podľa toho prispôsobil víkendový zábavný program.
Pani z cestovnej kancelárie mu navrhla, že lepšie bude, ak mu pošle zoznam hostí spolu s ich vekom.
Prečo podľa nej nestačilo udať priemerný vek hostí 23 rokov? Koľko rokov mohli mať ubytovaní hostia?

Ak bude animátor pripravovať program len podľa priemerného veku,
môže sa stať, že program nebude pre hostí vhodný.
Pri priemernom veku 23 rokov mohli mať hostia napr. 21, 22, 23, 23, 24, 25 rokov.

$$\text{priemerný vek} = \frac{21 + 22 + 23 + 23 + 24 + 25}{6} = 23 \text{ rokov}$$

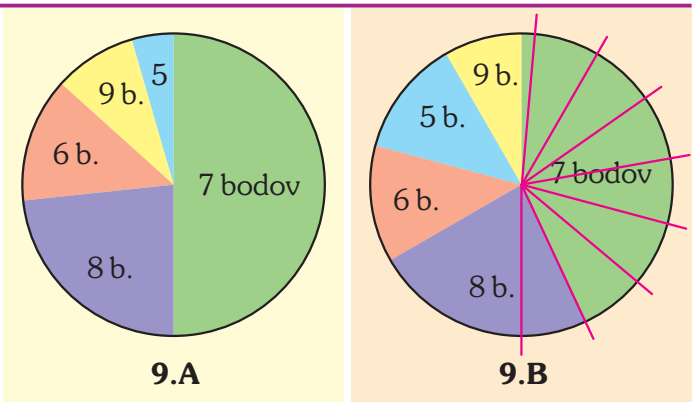
Rovnako sa však mohlo stať, že hostia by boli vo veku
33, 36, 30, 32, 4, 3 roky a ich priemerný vek by bol
tiež 23 rokov: $(33 + 36 + 30 + 32 + 4 + 3) : 6 = 23$.

Porovnajte v triede návrhy žiakov o veku hostí a diskutujte s nimi, ako tú šesticu dostali.



Pri oboch skupinách je priemerný vek rovnaký, ale záujmy
týchto skupín budú zrejme odlišné, keďže prvú skupinu
môžu tvoriť napr. študenti a druhú rodiny s malými deťmi.
Animátor by teda nemusel pripraviť vhodný program.

A5 Žiaci 9.A a 9.B písali ten istý test zo štatistiky, v ktorom sa dalo získať maximálne 10 bodov. Pani učiteľka bola spokojná, lebo všetci získali aspoň 5 bodov. Pre každú triedu pripravila kruhový diagram zobrazujúci výsledky triedy.



a Približne koľko percent žiakov 9.B získalo z testu 7 bodov? Ako to zistíš?

V pravom grafe vidno, že zelená časť je menej ako polkruh, teda 7 bodov získalo menej ako polovica žiakov 9.B (menej ako 50 %). Kúsok, ktorý chýba do 50 %, sa do polovice kruhu zmestí približne 7-krát, preto predstavuje približne 7 % (50 : 7 = 7,14). Zelená časť diagramu je o tento kúsok menšia ako polovica (menej ako 50 %), preto 7 bodov získalo približne 43 % žiakov.

b Šimon, ktorý chodí do 9.A, povedal Filipovi z 9.B:
„V našej triede bolo viac žiakov, ktorí získali 7 bodov, ako vo vašej.“
Má Šimon pravdu? Ako to vieš?

Môže mať pravdu, ale nemusí.

Mal by určite pravdu, keby bol počet žiakov v oboch triedach rovnaký. V 9.A získalo 7 bodov 50 % žiakov, kým v 9.B asi 43 %. Ale ak je v 9.A napríklad 20 žiakov, tak 10 z nich (polovica) malo 7 bodov. Ak je v 9.B 30 žiakov, 7 bodov získalo asi 43 % žiakov, čo je približne 13 žiakov a to je viac ako 10.

c Filip povedal: *„V našej triede bolo viac žiakov, ktorí dostali 5 bodov ako tých, ktorí dostali 9 bodov.“*
Je to pravda? Zdôvodni to.

Áno, lebo na diagrame je kruhový výsek prislúchajúci žiakom s 5 bodmi väčší ako ten s 9 bodmi.

d V jednej z úloh v teste o aritmetickom priemere mali žiaci k rovniciam priradiť, čo dostanú, ak vypočítajú hodnotu x. Ktoré dvojice sú správne? Zdôvodni svoj výber.

A: $\frac{4 + 5 + 3 \cdot 6 + 7 + 2 \cdot 8}{x} = 6{,}25$

B: $\frac{3{,}1 + 1{,}5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot x}{6} = 4{,}8$

C: $\frac{0{,}2 - 4{,}1 + 2{,}3 - 1{,}5}{4} = x$

1. štatistický súbor
2. štatistický znak
3. rozsah štatistického súboru
4. aritmetický priemer
5. štatistická jednotka

Správne dvojice: A3, B5 a C4.

V rovnici A je x v menovateli a podľa vzorca na výpočet AP ide o rozsah štatistického súboru.

V rovnici B je rozsah súboru 6, x musí byť štatistická jednotka, lebo ich má byť spolu 6 a v čitateli sú uvedené štatistické jednotky 3,1; 1,5; 4; 4; x; x.

V rovnici C je súčet štyroch čísel (dve z nich sú záporné: –4,1 a –1,5) vydelený ich počtom (4), čo je AP týchto čísel.

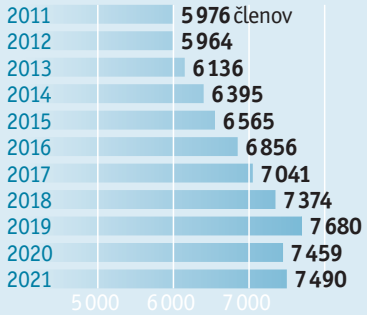
A6 Na triednickú hodinu si žiaci mali pripraviť prezentáciu o svojich voľnočasových aktivitách. Skaut Peťo chcel spolužiakom priblížiť skauting. Na jednom slajde uvádzal aj štatistické údaje, ktoré našiel na webstránke *skauting.sk*. Triedna to nevydržala a hovorí žiakom:

„Decká, ja viem, že nie je hodina matematiky, ale nedá mi nevyužiť tento Peťov parádny slajd! Dám vám tri kontrolné otázky. Skúste mi odpovedať bez toho, aby ste niečo počítali.“

Skauting v číslach

Vekové kategórie		Počet členov
do 6 rokov	predškoláci	206
7 – 10 r.	vlčatá a včielky	1 363
11 – 14 r.	skauti a skautky	2 115
15 – 18 r.	rangeri a rangerky	1 334
19 – 24 r.	roveri a roverky	895
nad 25 r.	dospelí skauti a skautky	1 577

Vývoj členskej základne



Kde nájdete skautov

Počet skautov v skautských oblastiach na Slovensku

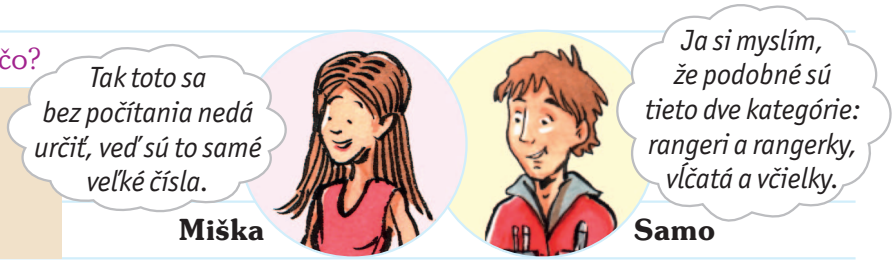
a Súhlasíš s Mirom? Prečo?

1. otázka:
Je pravda, že v rokoch 2011 – 2019 sa počet členov Slovenského skautingu každoročne zvyšoval?

Nie úplne,
lebo v roku 2012 počet skautov oproti predchádzajúcemu roku mierne klesol.
Počet skautov sa každoročne zvyšoval počnúc rokom 2012 do roku 2019.

b Má pravdu Miška alebo Samo? Prečo?

2. otázka:
Pozrite sa na vekové kategórie skautov. Ktoré z nich majú podobné percentuálne zastúpenie?



Kategórie, ktoré majú približne rovnaký počet členov, budú mať aj veľmi podobné percentuálne zastúpenie. Čím viac členov, tým viac percent.
Rozdiel medzi kategóriami (7 až 10) a (15 až 18) je iba 1 363 – 1 334 = 29 členov, preto percentuálny rozdiel bude tiež malý, resp. najmenší spomedzi ostatných.
Pravdu má Samo.

c S ktorým názorom súhlasíš a prečo?

3. otázka:
Ak Slovensko rozdelíme na 3 časti – západné, stredné a východné – je najviac skautov na západnom Slovensku?

Lujza má pravdu,
lebo západné Slovensko nie je to isté ako Západoslovenská oblasť. Na západ Slovenska patrí aj Bratislavská oblasť, aj Nitrianska oblasť. Po sčítaní so Západoslovenskou oblasťou vyjde viac ako 4 000 skautov (1 716 + 1 306 + 1 332).