I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

Argumentácia v matematike

pre 9. ročník ZŠ
a 4. ročník GOŠ

1. zošit

Projekt **MaTeK**

Orbis**P**ictus**I**stropolitana

1 Mocniny a odmocniny

A1 Mama vysvetľovala Eme, aký je rozdiel medzi umocnením a násobením.

a Doplň chýbajúce čísla a slová.

Násobenie: $5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15$ Násobenie je opakované sčítanie.

Umocnenie: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Umocnenie je opakované násobenie.

b Potom to mama ešte vysvetľovala opačne. Doplň chýbajúci text.

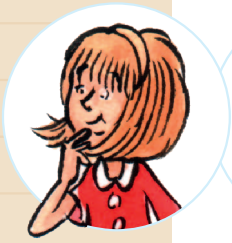
Opakované sčítanie, napr. $a + a + a + a = 4a$, môžeš nahradiť násobením.

Opakované násobenie, napr. $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$, môžeš nahradiť umocnením.

A2 Ema a Filip vyriešili tú istú úlohu v písomke rôznymi spôsobmi. Kto z nich to vyriešil správne? Ak niekto z nich urobil chybu, vysvetli akú a napíš aj správne riešenie.

$3^5 + 3^5 + 3^5 = ?$

$15 + 15 + 15 = 45$



$3^5 + 3^5 + 3^5 = ?$

$5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 =$

$= 125 + 125 + 125 =$

$= 375$

Ani jeden to nemá správne.

Ema namiesto umocnenia trojky vynásobila základ mocniny (3) mocniteľom (5).

Zápis 3^5 znamená, že trojku treba opakovane (5-krát) násobiť.

Dostaneme $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

Správne riešenie: $3^5 + 3^5 + 3^5 = 243 + 243 + 243 = 3 \cdot 243 = 729$.

Filip namiesto 3^5 vypočítal 5^3, teda zamenil základ mocniny a mocniteľa.

A3 Pán učiteľ napísal na 4 karty 4 rôzne číselné výrazy s mocninami. Nájdi výrazy, ktoré majú rovnakú hodnotu.

a $2^3 \times 2^3$ **b** $(2^3)^2$ **c** 2^6 **d** 4^3

$2^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot 8 = 64$ $(2^3)^2 = 8^2 = 64$ $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Všetky výrazy majú hodnotu 64.

A4 **a** Doplň tabuľku hodnôt mocniny desiatky.

10^4	10^3	10^2	10^1
10 000	1 000	100	10

b Pozoruj, ako sa menia hodnoty mocnín s klesajúcim mocniteľom. Čo si všimneš?

c Ako asi pokračuje tabuľka pre ďalšie hodnoty v tejto postupnosti?

10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$

Pri poklese mocniteľa o 1

sa hodnota mocniny 10-krát zmenší.

Žiaci môžu povedať, že počet núl v danej mocnine desiatky je také isté číslo ako mocniteľ. To je správne, avšak kvôli pokračovaniu úlohy ich potrebujeme naviesť na 10-násobné zmenšovanie, napr. otázkou: Aká je každá ďalšia mocnina oproti predchádzajúcej? (väčšia/menšia? O koľko?).

Cieľom úlohy je, aby si žiaci všimli postupnosť a aplikovali ju na ďalšie členy.

A5 Majka upravovala výrazy s mocninami. Nebola si však istá, či má všetko správne. Skontroluj jej riešenia a tam, kde má chybu, vysvetli, prečo je jej riešenie nesprávne.

a $5a^2 - 5 = a^2$ **správne – nesprávne**

Lebo $5a^2$ je skrátený zápis $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$,

čiže odobraním päťky mi nezostane a^2.

Výraz sa dá upraviť len vyňatím päťky na $5(a^2 - 1)$.

b $a^2 + a^3 = a^5$ **správne – nesprávne**

Lebo nejde o súčin piatich a, ale súčin dvoch a sčítaný so súčinom troch a.

Na príklade to vidno lepšie: $2^2 + 2^3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$,

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Teda $2^2 + 2^3 \neq 2^5$.

Výraz sa dá upraviť len vyňatím a^2 na $a^2(1 + a)$.

c $b^2 + (3b)^2 = 10b^2$ **správne – nesprávne**

d $\frac{20b^8}{4b^2} = 5b^4$ **správne – nesprávne**

Lebo po vynásobení menovateľa zlomku s výsledkom delenia musíme dostať opäť čitateľa (napr. platí $\frac{12}{4} = 3$, lebo $4 \cdot 3 = 12$).

Tu vychádza čitateľ: $4b^2 \cdot 5b^4 = 4 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot b^4 = 20b^6$.

Aby sme dostali $20b^8$, výsledok delenia musí byť $5b^6$.

V tejto úlohe sa vyskytujú chyby, ktoré žiaci často robia.
Diskutujte so žiakmi v triede, v čom spočíva problém – nestačí len uviesť správne riešenie.

A6 Viktor vymyslel tvrdenie o druhej a tretej mocnine.

a Nájdi takú hodnotu čísla x, pre ktorú je Viktorovo tvrdenie pravdivé.

Napr. ak $x = 3$,
potom $x^2 = 3^2 = 9 < x^3 = 3^3 = 27$.

b Nájdi takú hodnotu čísla x, aby Viktorovo trvdenie **nebolo** pravdivé.

Napr. ak $x = -1$, potom $x^2 = (-1)^2 = 1 > x^3 = (-1)^3 = -1$;
ak $x = \frac{1}{2}$, potom $x^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} > x^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

c Existuje hodnota čísla x, ktorej druhá aj tretia mocnina sú rovnaké?

Áno, túto podmienky spĺňajú iba čísla 0 a 1,
pretože $x^2 = (0)^2 = 0 = x^3 = (0)^3 = 0$
a $x^2 = (1)^2 = 1 = x^3 = (1)^3 = 1$.

d Preformuluj Viktorovo tvrdenie o vzťahu druhej a tretej mocniny tak, aby bolo pravdivé vždy.

Druhá mocnina kladného čísla x väčšieho ako 1
je menšia ako jeho tretia mocnina.

A7 Žiaci mali určiť, ktorá kocka má najväčší objem, pričom mali zadané dĺžky ich hrán. S kým súhlasíš a prečo?

kocka 1	kocka 2	kocka 3
$a = 0{,}5$ dm	$a = 5$ cm	$a = 50$ mm

Luckino tvrdenie nie je správne, pretože sa nestačí pozrieť na jednotky, 0,5 dm je to isté ako 5 cm.

Martin nemá pravdu,
lebo sa nestačí pozrieť len na čísla,
ale aj na jednotky – 50 mm je to isté ako 5 cm.

0,5 dm = 5 cm = 50 mm, preto má pravdu Lukáš.

Všetky tri kocky sú rovnaké,
preto budú rovnaké aj ich objemy.

Žiaci môžu argumentovať aj tak, že najprv určia objemy všetkých troch kociek a potom ich porovnajú. Musia však mať objemy v rovnakých jednotkách. Diskutujte s nimi, ktoré riešenie je efektívnejšie a či vôbec treba počítať objem kocky.

A8 Danka overovala platnosť tvrdení tak, že za písmená dosadila nejaké čísla. Pri každom jej vyšlo, že tvrdenie platí. Ktoré čísla mohla v jednotlivých tvrdeniach dosadiť? Sú tieto tvrdenia naozaj pravdivé vždy? Prečo?

a $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr. $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

$2^{2 \cdot 3} = 2^6$

Lebo to, čo sme spravili s 2, môžeme spraviť s hocijakým číslom a, pričom $(a^r)^s$ znamená s-krát vynásobiť a^r samo sebou a a^r je r-krát vynásobené a samo sebou. Spolu máme teda súčin $(r \cdot s)$ a-čok.

b $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr. $\sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{1} + \sqrt{0} = 1$

Lebo neplatí napr. pre 1 a 1. (Platí, ak aspoň jedno z a, b je 0.)

c $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr. $(2-2)^2 = 0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

$2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

Lebo neplatí napr. pre 7 a 2. (Platí, ak $a = b$ alebo $b = 0$.)

d $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr. $2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

$2^{3+4} = 2^7$

Lebo to, čo sme spravili s 2, môžeme spraviť s hocijakým číslom a, pričom a^r znamená r-krát vynásobiť a samo sebou a podobne to platí pre a^s. Spolu máme teda súčin $(r + s)$ a-čok.

e $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr. $(2+0)^2 = 2^2 = 4$

$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

Lebo neplatí napr. pre 1 a 2. (Platí, ak aspoň jedno z a, b je 0.)

A9 Katka našla na internete návod, ako sa dá ľahko vypočítať druhá odmocnina z čísel 64 a 25.

$\sqrt[2]{64} = 8$ (10 – 2)

$\sqrt[2]{25} = 5$ (7 – 2)

a Ktoré číslo by podľa tohto návodu bolo treťou odmocninou zo 125?

$\sqrt[3]{125} = ?$

$1 + 2 + 5 = 8$, $8 - 3 = 5$, preto $\sqrt[3]{125} = 5$

Cieľom úlohy je porozumieť návodu (hľadanie opakujúceho sa vzoru) a potom ho aplikovať.

b Niektorí komentujúci však tvrdili, že tento návod nefunguje pre ľubovoľné prirodzené číslo. Majú pravdu? Prečo?

Majú pravdu. Návod nefunguje napr. pre $\sqrt{100}$, $\sqrt{49}$ alebo $\sqrt{33}$.

$1 + 0 + 0 = 1$, $1 - 2 = -1$, ale $\sqrt{100} \neq -1$, lebo $(-1)^2 = 1$

$4 + 9 = 13$, $13 - 2 = 11$, ale $\sqrt{49} \neq 11$, lebo $11^2 = 121$

$3 + 3 = 6$, $6 - 2 = 4$, ale $\sqrt{33} \neq 4$, lebo $4^2 = 16$

Očakávame, že žiaci overia platnosť návodu na vybranom čísle.
Cieľom úlohy je vyvrátiť tvrdenie vyplývajúce z obrázka pomocou kontrapríkladu.

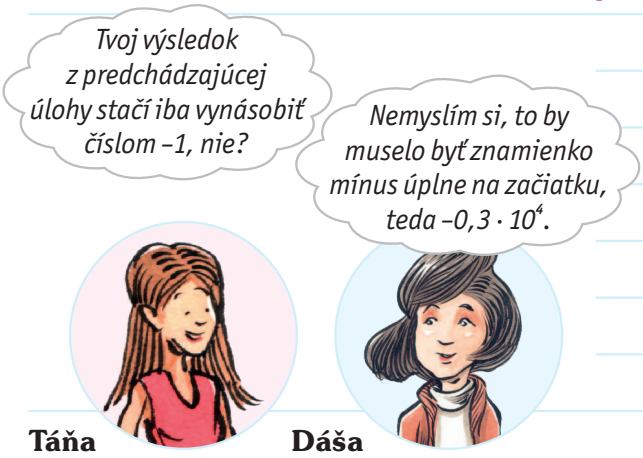
A10 Ktoré číslo je väčšie, $47{,}3 \cdot 10^6$ alebo $1{,}108 \cdot 10^8$? Zdôvodni svoju odpoveď bez použitia kalkulačky.

Úpravou druhého čísla $1{,}108 \cdot 10^8 = 110{,}8 \cdot 10^6$ dosiahneme rovnakú mocninu 10 u oboch čísel, stačí teda porovnať základy.
Keďže $110{,}8 > 47{,}3$, tak aj $1{,}108 \cdot 10^8 > 47{,}3 \cdot 10^6$.

A11 **a** Táňa a Dáša určovali hodnotu čísla $0{,}3 \cdot 10^4$. S ktorým z dievčat súhlasíš a prečo?

Pravdu má Dáša.
Exponent 4 udáva počet činiteľov, teda $0{,}3 \cdot 10^4 =$
$= 0{,}3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3\,000$.

b Neskôr mali určiť, či je číslo $0{,}3 \cdot 10^{-4}$ väčšie alebo menšie ako nula.
Je číslo $0{,}3 \cdot 10^{-4}$ kladné alebo záporné? S ktorým z dievčat súhlasíš a prečo?



Je kladné.
Záporný exponent vyjadruje prevrátenú hodnotu mocniny, takže 10^4 sa nachádza „pod zlomkovou čiarou“.

$0{,}3 \cdot 10^{-4} = 0{,}3 \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} =$
$= 0{,}000\,03$.

Všetky činitele sú kladné, teda aj výsledok je kladné číslo. Pravdu má opäť Dáša.

A12 Na svete je približne osem miliárd ľudí. Vedci vypočítali, že keby existoval svet len so 100 ľuďmi, 20 z nich by boli deti, 25 ľudí by nemalo jedlo a prístrešie, 17 ľudí by hovorilo po čínsky a 8 by hovorilo po anglicky. Na základe uvedených údajov odpovedz na nasledujúce otázky a vysvetli, prečo sú tvoje odpovede správne.

a Aká časť ľudí na svete, vyjadrená zlomkom, nemá jedlo a prístrešie?

Štvrtina, lebo vo svete so 100 ľuďmi by to bolo 25 ľudí, čo je $\frac{1}{4}$.

b Koľko je v súčasnom svete detí?

Vo svete so 100 ľuďmi by deti tvorili pätinu ľudí.

Preto v skutočnom svete s 8 miliardami ľudí bude detí tiež jedna pätina.

8 : 5 = 1,6, takže na svete je približne 1,6 miliardy detí.

c O koľko viac ľudí v súčasnom svete hovorí po čínsky ako po anglicky?

Po čínsky ..... 17 % .... 0,17 · 8 = 1,36 miliardy

Po anglicky .... 8 % .... 0,08 · 8 = 0,64 miliardy 1,36 – 0,64 = 0,72

Na svete hovorí po čínsky o 0,72 miliardy viac ľudí ako po anglicky.

d V USA žije približne $3{,}3 \cdot 10^8$ ľudí. Koľko ľudí vo svete so 100 ľuďmi by žilo v USA?

80 ..... 100 % Celková populácia: 8 miliárd = $8 \cdot 10^9 = 80 \cdot 10^8$

3,3 .... x % Určíme, koľko percent z celkovej populácie žije v USA.

$3{,}3 : 80 = x : 100$

$3{,}3 \cdot 100 = 80x$ V USA žije 4,125 % svetovej populácie.

$330 = 80x$ Preto vo svete so 100 ľuďmi, by to bolo tiež len 4,125 %,

$x = 4{,}125$ čo sú približne 4 ľudia.

A13 Jana, Katka a Adam si zapisovali všetky číselné údaje z textu vedeckým zápisom.

Na Zemi sa nachádza celkovo 1 260 000 000 000 000 000 000 litrov vody.
Minimálne 1,8 miliardy ľudí používa zdroje pitnej vody kontaminované fekáliami.
Každý deň sa zo zemského povrchu vyparuje asi bilión ton vody.
Na výrobu jedného kilogramu kávy je potrebných až 11 000 litrov vody.

a Zakrúžkuj všetky vedecké zápisy, ktoré sú správne.

	Jana	Katka	Adam
Množstvo vody na Zemi	$126 \cdot 10^{19}$	$1{,}26 \cdot 10^{21}$	$12{,}6 \cdot 10^{20}$
Počet ľudí pijúcich kontaminovanú vodu	$1{,}8 \cdot 10^{9}$	$18 \cdot 10^{9}$	$1{,}8 \cdot 10^{8}$
Množstvo vody vyparenej za deň	$1\,000 \cdot 10^{9}$	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	$1 \cdot 10^{12}$
Spotreba vody na výrobu 1 kg kávy	$11 \cdot 10^{3}$	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	$1{,}1 \cdot 10^{3}$

b Akú najčastejšiu chybu urobili Jana, Katka a Adam a čo by mala pani učiteľka v škole ešte zdôrazniť?

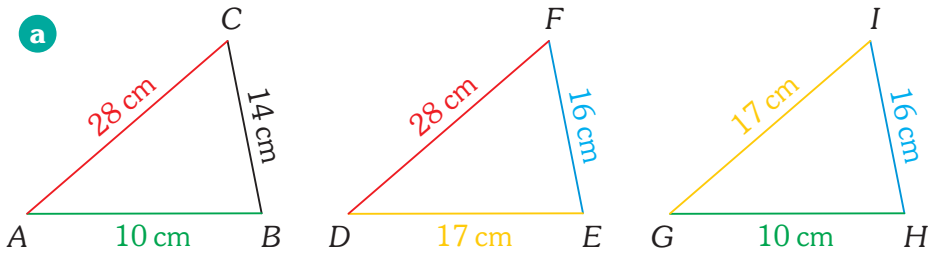
Najčastejšia chyba je, že nedodržali pravidlá vedeckého zápisu $a \cdot 10n$, pričom pre a platí, že $1 \leq a < 10$.

Napr. Jana má všetky hodnoty správne, ale iba jedna je vo vedeckom zápise.

2 Ďalšie konštrukcie trojuholníka

A1 Milan a Eliška mali rozhodnúť, či sa trojuholníky na obrázku dajú zostrojiť. Rozhodni, či sú ich úvahy správne. Ak nie, vysvetli, kde spravili chybu.

a



Milan: „Všetky trojuholníky sa dajú zostrojiť podľa vety *sss*."
Eliška: „Veta *sss* dáva zmysel, ale podľa mňa to ešte treba nejak overiť. Nepamätám si ako."

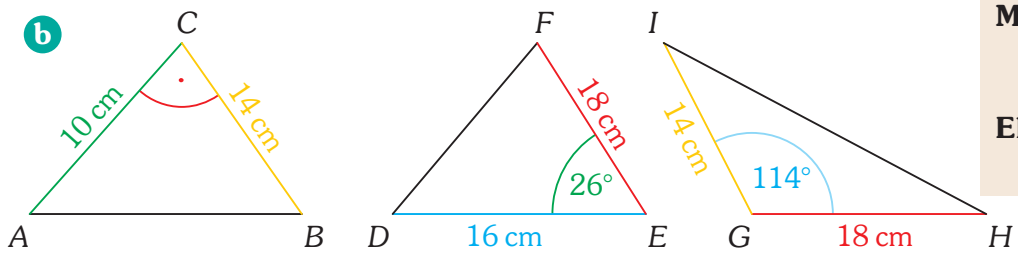
Milan nemá pravdu. Dĺžky strán musia spĺňať trojuholníkovú nerovnosť.

$\triangle ABC$: $14 + 10 < 28$ nedá sa zostrojiť

$\triangle DEF$: $16 + 17 > 28$ dá sa zostrojiť

$\triangle GHI$: $10 + 16 > 17$ dá sa zostrojiť

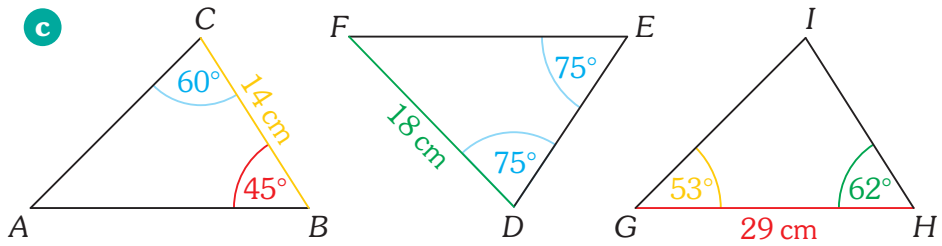
b



Milan: „Všetky trojuholníky sa dajú zostrojiť podľa vety *sus*."
Eliška: „Áno, mali by sa dať zostrojiť."

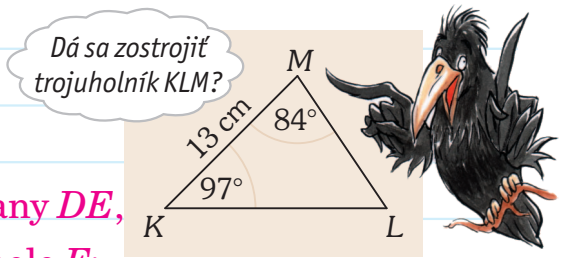
Obaja majú pravdu. Vo všetkých troch prípadoch sú zadané dĺžky dvoch strán a uhol nimi zovretý, takže trojuholníky sa dajú zostrojiť.

c

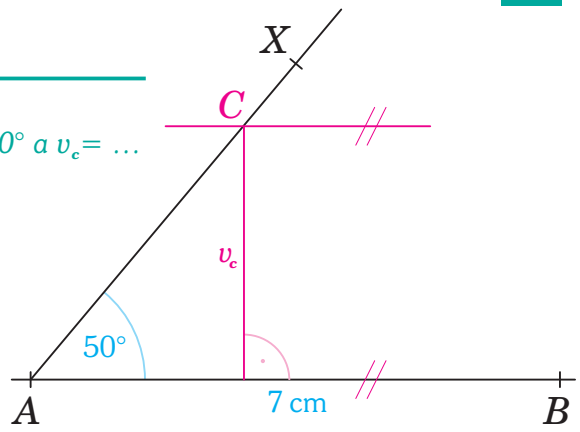


Milan: „Podľa vety *usu* viem zostrojiť $\triangle ABC$ a $\triangle GHI$. Pre $\triangle DEF$ to neplatí, ale neviem vysvetliť prečo."
Eliška: „$\triangle DEF$ sa tiež dá zostrojiť, len treba niečo dopočítať..."

Milan má pravdu, že $\triangle ABC$ a $\triangle GHI$ sa dajú zostrojiť podľa vety *usu* – k strane sú priľahlé dva uhly, ktorých veľkosť poznáme. To neplatí o $\triangle DEF$. Nevieme síce určiť dĺžku strany DE, ale vieme dopočítať veľkosť tretieho uhla pri vrchole F: $180° - 75° - 75° = 30°$. Teraz už dokážeme zostrojiť aj tento trojuholník. Trojuholník KLM (otázka vrany) sa nedí zostrojiť, lebo súčet jeho dvoch vnútorných uhlov je 181°, čo je viac ako 180°.



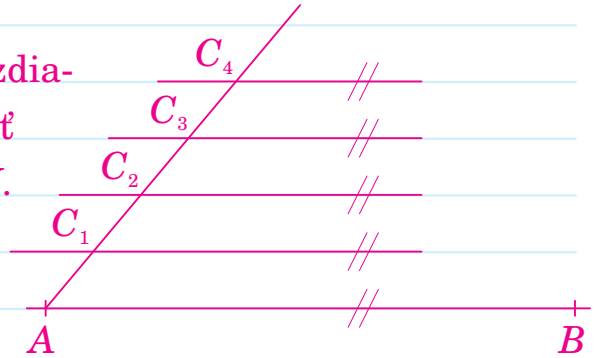
A2 Na obrázku je časť konštrukcie podľa zadania:
Zostrojte trojuholník ABC, ak |AB| = 7 cm, |∢BAC| = 50° a v_c = …



a Aká by mala byť dĺžka v_c, aby sa trojuholník dal zostrojiť? Zdôvodni svoje riešenie.

Ak by sme poznali dĺžku v_c, vrchol C nájdeme tak, že urobíme rovnobežku s úsečkou AB vo vzdialenosti v_c od AB. Tam, kde sa rovnobežka pretne s ramenom AX, vznikne vrchol C.

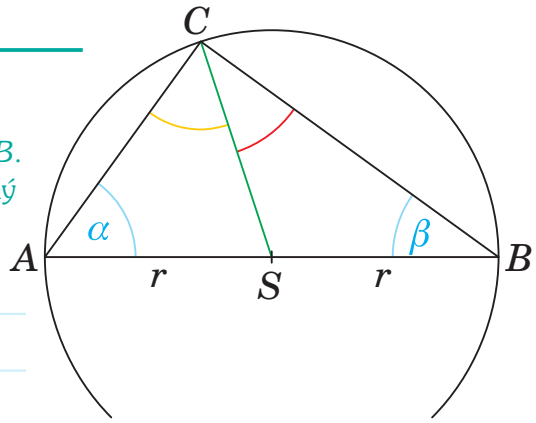
Tento postup vieme urobiť pre ľubovoľnú vzdialenosť od úsečky AB a rovnobežka bude mať vždy práve jeden priesečník s ramenom AX. Preto výška v_c môže mať ľubovoľnú nenulovú dĺžku.



b Aká by mala byť dĺžka v_c, aby mala úloha dve riešenia?

Úloha by mala dve riešenia vtedy, ak by sa rovnobežka a rameno AX pretli v dvoch rôznych bodoch. Tieto priamky sú rôznobežné, takže majú iba jeden priesečník. Úloha preto nikdy nebude mať dve riešenia v jednej polrovine.

A3 Dominika narysovala úsečku AB, našla jej stred S a zostrojila kružnicu so stredom v bode S a polomerom $r = \frac{1}{2}|AB|$. Na kružnici si zvolila bod C a spojila ho úsečkami s bodmi A, B. Vznikol pravouhlý trojuholník ABC. Zaujímala sa, či je pravouhlý iba náhodou. Preto chcela určiť veľkosť uhla pri vrchole C bez merania a riešenie zdôvodniť. Riešenie si rozkrokovala.



a Doplň chýbajúci text.

1. Úsečka SC má veľkosť r.
2. Trojuholník ASC je teda rovnoramenný, preto veľkosť uhla ACS je α.
   Trojuholník SBC je tiež rovnoramenný, preto veľkosť uhla BCS je β.
3. V každom trojuholníku je súčet veľkostí jeho vnútorných uhlov 180°.
   V trojuholníku ABC teda platí: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$.

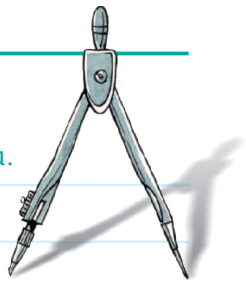
b Posledný výraz zjednoduš a urč, čomu sa rovná $\alpha + \beta$ (t. j. veľkosť uhla pri vrchole C).

$2\alpha + 2\beta = 180° \quad /:2$

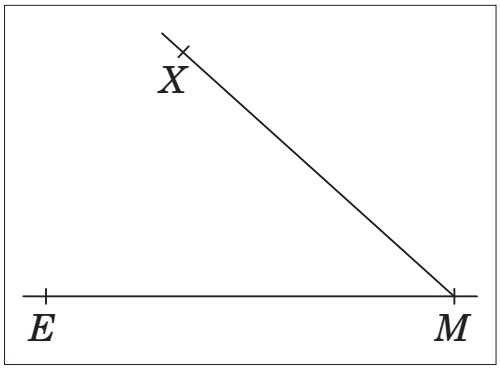
$\alpha + \beta = 90°$

Cieľom tejto úlohy je zdôvodniť, prečo sú body na Tálesovej kružnici (okrem bodov A, B) vrcholmi pravouhlých trojuholníkov. Sami by to žiaci na ZŠ pravdepodobne nezvládli, preto je zdôvodnenie rozkrokované a chýba len málo textu. Navádzame ich na deduktívne zdôvodňovanie, ktoré vedie k platnému dôkazu.

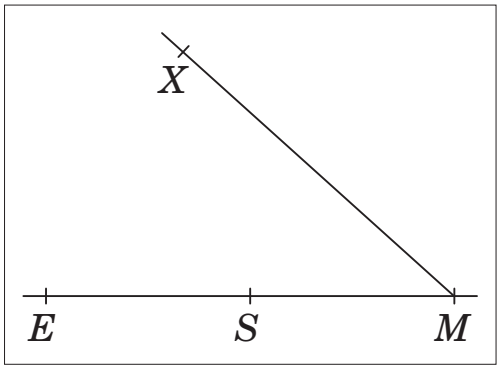
A4 Emil sa snažil narysovať trojuholník podľa zadania:
Zostrojte trojuholník EMA, ak |EM| = 5,4 cm, |∢EMA| = 42° a t_a = 4 cm.
Pani učiteľka mu pri kontrole prezradila, že pri konštrukcii urobil v jednom kroku chybu.



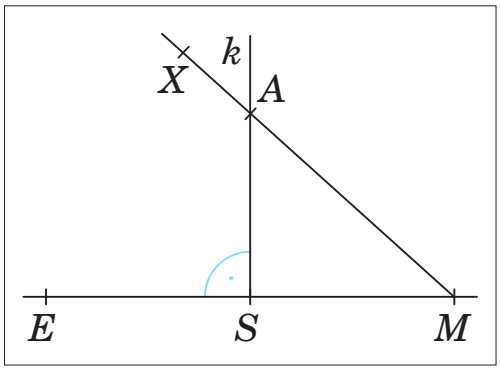
1. Narysoval úsečku *EM*, čiže stranu *a* trojuholníka *EMA*.



2. Zostrojil uhol *EMX*.



3. Narysoval stred strany *a*, aby mohol zostrojiť ťažnicu.



4. Cez bod *S* narysoval kolmicu na stranu *a* a tam, kde sa pretla s ramenom *MX*, vznikol vrchol *A*.

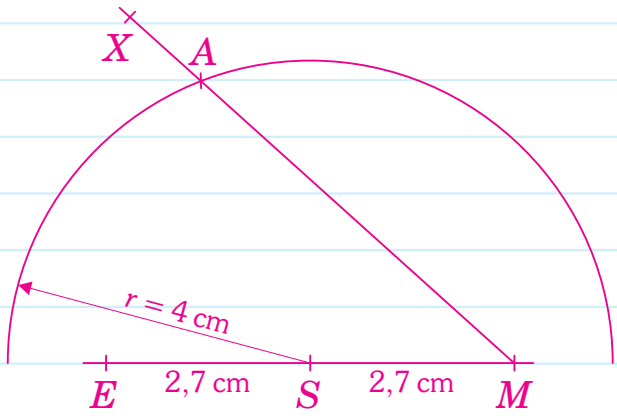
a Vysvetli, prečo Emilov postup nie je správny.

V kroku 4 narysoval kolmicu. Ťažnica je ale úsečka, ktorá spája vrchol so stredom protiľahlej strany. Kolmá na protiľahlú stranu je len v špeciálnych prípadoch – v rovnostrannom alebo v rovnoramenom trojuholníku.

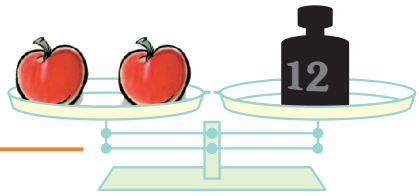
Namiesto zostrojenia kolmice mal Emil dĺžku ťažnice naniesť pomocou kružidla, teda narysovať kružnicu so stredom *S*, ktorej polomerom je dĺžka ťažnice. Tam, kde sa kružnica pretne s ramenom *MX*, vznikne vrchol *A*.

b Dá sa určiť, koľko riešení bude mať úloha, bez toho, aby sme trojuholník rysovali?

Od stredu *S* po krajné body *E* a *M* je 2,7 cm. Ťažnica má mať dĺžku 4 cm, preto treba narysovať kružnicu s týmto polomerom. Tá pretne rameno *MX* iba v jednom bode. Úloha preto bude mať iba jedno riešenie v jednej polrovine.



3 Lineárne rovnice



A1 Ktorá z rovníc sem nepatrí? Zdôvodni prečo.

A: $2x = 12$
B: $x + 2 = 8$
C: $x - 4 = 2$
D: $x = 3x - 6$

Nepatrí sem napr. rovnica D,
pretože riešením prvých troch je číslo 6
a to nie je riešením D.

Žiaci môžu prísť aj s inými odpoveďami, musia ich ale zdôvodniť. Úloha je pomerne jednoduchá, chceme zapojiť všetkých žiakov.

A2 **a** Ku každej rovnici napíš, ktorú ekvivalentnú úpravu je vhodné urobiť ako prvú.

A: $6 + 5x = 8$ — odpočítať 6
B: $5x - 8 = 12$ — pripočítať 8
C: $6 + 5x = 7$ — odpočítať 6
D: $5x = 25$ — vydeliť 5
E: $\frac{2}{3}x = 56$ — vynásobiť 3
F: $6x + 9 = 3$ — odpočítať 9
G: $3x = 9$ — vydeliť 3
H: $8 = 2x - 1$ — +1 alebo vymeniť strany

b Ktorá z rovníc sem nepatrí a prečo?

Rovnica H,
lebo neznáma je na pravej strane.
Alebo rovnica E,
lebo ako jediná má v zadaní zlomok.

Cieľom tejto úlohy je, aby žiaci rovnice porovnali (vzhľadom na úpravy, ktoré by urobili) a identifikovali podobnosti a rozdiely. Môžu, samozrejme, prísť aj s inými odpoveďami, musia ich ale zdôvodniť.

A3 Žiaci mali na písomke vyriešiť 4 rovnice. Za každú mohli získať 2 body.

a Oprav Soninu písomku.

(1)
$2z + 3 = 3z + 4 \quad /+\cancel{3}\ -3$
$2z = 3z + \cancel{7}\ 1 \quad /-3z$
$-z = \cancel{7}\ 1 \quad /\cdot(-1)$
$z = \cancel{-7}\ -1$

(2)
$5 - 8 = 3y - 2 \quad /+8$
$5 = 3y + \cancel{10}\ 6 \quad /-\cancel{10}\ 6$
$-1\cancel{5} = 3y \quad /:3$
$-\frac{1}{3}\cancel{5} = y$

(3)
$4 \cdot (4 - 1) = 6x - 6$
$16 - \cancel{1}\ 4 = 6x - 6$
$12\ \cancel{15} = 6x - 6 \quad /+6$
$18\ \cancel{21} = 6x \quad /:6$
$x = \frac{\cancel{21}}{\cancel{6}}\ 3$

(4)
$2x + 6 = x + 2 \quad /-6$
$2x = x - 4 \quad /-x$
$x = -4$
Riešenie je správne.

b Koľko bodov by asi dostala Soňa od pani učiteľky za túto písomku a prečo?

Cieľom tejto úlohy je, aby žiaci skontrolovali riešenia niekoho iného, identifikovali chyby, rozhodli, do akej miery sú chyby závažné, a pridelili riešeniam body. Je to subjektívne, ale môže z toho vzniknúť dobrá diskusia o chybách pri riešení rovníc, kde budú žiaci jednotlivé kroky zdôvodňovať.

A4 Žiaci chodili v dvojiciach k tabuli a ich úlohou bolo pri riešení rovníc zvoliť vhodnú ekvivalentnú úpravu. Vysvetli ich postup a oprav prípadné chyby.

a

$$\frac{1}{2}(x-4)+\frac{1}{4}(x+3)=5 \qquad /\cdot 4$$

$$2(x-4)+(x+3)=5\cdot 4$$

V riešení nie je vynásobená pravá strana rovnice.

$$\frac{1}{2}(x-4)+\frac{1}{4}(x+3)=5 \qquad /\cdot 2$$

$$(x-4)+\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}(x+3)=10$$

V riešení je zle vynásobená druhá zátvorka.

b

$$-4x-6=12-2x \qquad /-4x$$

$$-6=12-2x+4x$$

$$-6=12-\cancel{6x}+2x$$

Žiak sa dopustil dvojnásobnej chyby. Ak chce mať neznámu iba na pravej strane rovnice, tak musí výraz $4x$ k obom stranám rovnice pripočítať. Zároveň na ľavej strane rovnice zabudol znamienko mínus pri čísle 6.

$$-4x-6=12-2x \qquad /+2x$$

$$-4x-6+2x=12$$

$$-2x-6=12$$

V riešení žiak k obom stranám rovnice pripočítal výraz $2x$ a tak výrazy s neznámou ostali iba na ľavej strane rovnice. Postup je správny.

c

$$8x=4 \qquad /:8$$

$$x=0{,}5$$

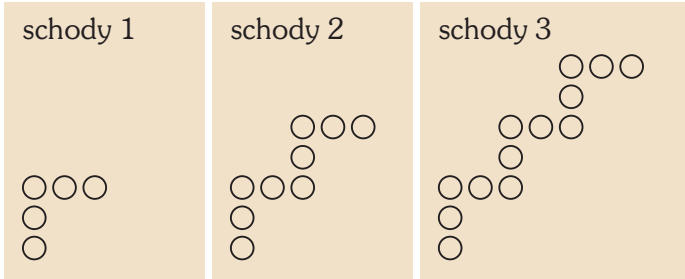
Riešenie je správne, obe strany rovnice sú vydelené rovnakým nenulovým číslom.

$$8x=4 \qquad /:4$$

$$2x=\cancel{2}\,1$$

Chyba je v delení – ak máme deliť obe strany štvorkou, má vyjsť $2x=1$. Ak by sme delili obe strany číslom 8, dostali by sme výsledok správny.

A5 Mia kreslila schody z bodiek podľa určitého pravidla.



a Koľko bodiek budú mať schody číslo 4, 5 a 10? Odpoveď zdôvodni.

Schody číslo	1	2	3	4	5	10
Počet bodiek	5	9	13	17	21	41

Prvý schod má 5 bodiek a v každom ďalšom sa pridávajú 4 bodky.
Od prvého schodu po desiaty schod pripájame 9 × 4 bodky,
preto schody číslo 10 budú mať $5 + 9 \cdot 4 = 5 + 36 = 41$ bodiek.

Žiaci môžu schody aj kresliť alebo si všimnúť nárast o 4 v tabuľke a podľa toho určiť počet bodiek v schodoch číslo 10.
S takýmto typom úlohy sa už stretli v nižších ročníkoch, len ju pripomíname.

b Z koľkých bodiek pozostávajú schody číslo 100, 1 000 a 1 001 v tejto postupnosti? Odpoveď zdôvodni.

Aplikujeme ten istý princíp z časti a).
schody 100 ..... $5 + 99 \cdot 4 = 401$ bodiek
schody 1 000 .... $5 + 999 \cdot 4 = 4\,001$ bodiek
schody 1 001 .... o 4 bodky viac ako schody 1 000 .... teda 4 005 bodiek

Žiaci musia dospieť k výrazu, podľa ktorého budú počet bodiek určovať.
Porovnajte ich stratégie riešenia v spoločnej diskusii.

c Mia napísala výraz, pomocou ktorého sa dá určiť počet bodiek b_n v ľubovoľných schodoch číslo n. Je výraz správny? Vysvetli, čo, podľa teba, reprezentujú jednotlivé časti výrazu.

$$b_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$$

Áno, výraz je správny.
Premenná b_n určuje počet bodiek v schode číslo n,
5 je konštanta, ktorá sa nachádza v každých schodoch (schod 1 má 5 bodiek)
a zvyšná časť vzorca $(n - 1) \cdot 4$ vyjadruje, koľkokrát pridáme po 4 bodky
k schodu 1.

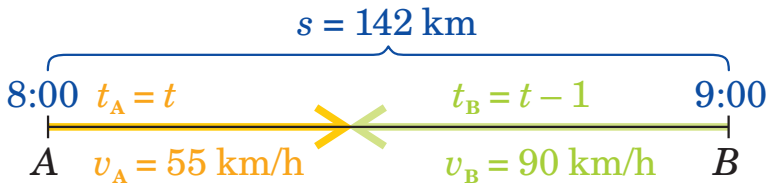
b Otec tvrdil, že existujú schody, ktoré pozostávajú presne z 2 345 bodiek. Mia dosadila počet bodiek do výrazu a vyriešila rovnicu s neznámou n. Čo jej vyšlo? Mal otec pravdu?

$2\,345 = 5 + (n - 1) \cdot 4 \quad /-5$
$2\,340 = 4n - 4 \quad /+4$
$2\,344 = 4n \quad /:4$
$586 = n$

Otec mal pravdu, schody číslo 586 by pozostávali z 2 345 bodiek.

A6 Samo mal za domácu úlohu dokončiť riešenie slovnej úlohy na pohyb. Je Samovo riešenie správne? Aká by mala byť jeho odpoveď na otázku?

Dve mestá sú od seba vzdialené 142 km.
Z mesta A vyrazí o 8:00 auto, ktoré ide priemernou rýchlosťou 55 km/h.
Z mesta B auto vyrazí až o 9:00 priemernou rýchlosťou 90 km/h.
Koľko bude hodín, keď sa autá stretnú?



$s_A = v_A \cdot t_A$
$s_A = 55 \cdot t$

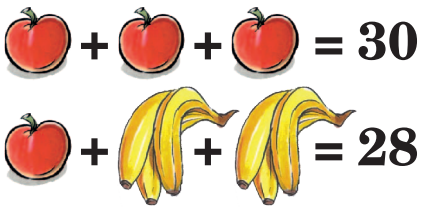
$s_B = v_B \cdot t_B$
$s_B = 90 \cdot (t - 1)$
$s_B = 90t - 90$

$s = s_A + s_B$
$142 = 55t + 90t - 90$
$142 = 145t - 90$ /+ 90
$232 = 145t$ /: 145
$t = 1{,}6$ h

Riešenie je správne.
Samo označil neznámou t čas (v hodinách), ktorý uplynie autu idúcemu z mesta A od 8:00, pokým sa obe autá nestretnú. Druhému autu idúcemu z mesta B od 9:00 uplynie do stretnutia o hodinu menej času, čiže $t - 1$ hodín.
Vyriešením pohybovej rovnice dostáva
$t = 1{,}6$ h $= 1{,}6 \cdot 60 = 96$ min $= 1$ h 36 min.
Autá sa stretnú približne o 9:36.

Cieľom úlohy je posúdiť správnosť riešenia. Náročné môže byť pochopenie, čo vlastne reprezentuje neznáma t a prečo je v prípade auta idúceho z mesta B čas označený ako t – 1.

A7 Veronika videla na internete úlohu, v ktorej bolo treba určiť hodnotu jedného banána. Do komentára napísala:
„To je super ľahké, banán má hodnotu 9.“
Jej babka Veronikinu odpoveď okomentovala:
„Veronička moja, nemáš to dobre.“
Ako Veronike vysvetlíš, prečo je jej odpoveď nesprávna?



Veronika pravdepodobne z prvej rovnosti dostala, že 1 jablko má hodnotu 10 a to dosadila do druhej rovnice. Dostala tak, že *banány* + *banány* = 18.
Vydelila 18 dvoma a vyšlo jej, že banán má hodnotu 9.
V rovnici na obrázku je však trs troch banánov, nie jeden.
Preto 9 znamená hodnotu 3 banánov. Jeden banán má teda hodnotu 3.

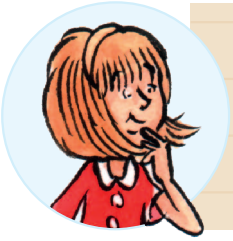
A8 Ktorá z rovníc je správna na vyriešenie nasledujúcej úlohy?
„Myslím si číslo, pripočítam k nemu 8 a výsledok vynásobím 3. Dostanem číslo 66. Ktoré číslo som si myslel?“

$x + 24 = 66$	$3x + 8 = 66$
$3x + 24 = 66$	$3(x + 8) = 66$

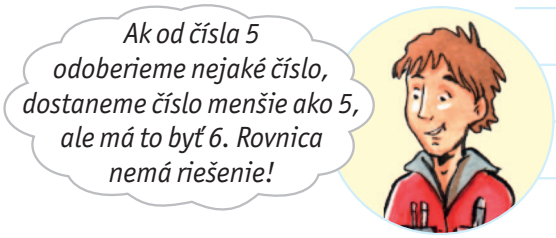
Správne sú obidve spodné rovnice.
Obidvoma dostaneme číslo 14, ktoré vyhovuje úlohe.

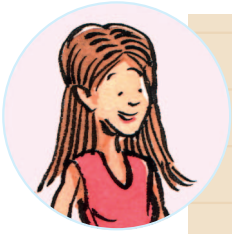
So žiakmi môžete diskutovať o tom, ako by sa muselo zmeniť zadanie úlohy, aby prvá, resp. druhá rovnica bola správna.

A9 Liana a Boris riešili rovnicu $5 - x = 6$.



$5 - x = 6$
$x = 6 - 5$
$x = 1$





$5 - x = 6$
$x - 5 = 6 \quad /+5$
$x = 11$

a Kto z nich vyriešil rovnicu správne? Svoju odpoveď zdôvodni.

Ani jeden to nemá dobre.
Skúškou správnosti Liana dostane $5 - 1 = 4$, nie 6.
Borisova úvaha platí iba pre kladné číslo x.
Ak od 5 odoberieme záporné číslo, tak ho vlastne pripočítame a výsledok bude väčší ako 5.
Riešením je číslo -1, lebo $5 - (-1) = 5 + 1 = 6$.

b Klára riešila tú istú rovnicu. Ako jej vysvetlíš, že $5 - x = 6$ nie je to isté ako $x - 5 = 6$?

$5 - 1$ nie je to isté ako $1 - 5$,
preto ani $5 - x$ nie je to isté ako $x - 5$.
Mohla by skúsiť dosadiť za x aj 11 do pôvodnej rovnice (skúška správnosti).

A10 Tri klokany, Hop, Skok a Skacko, majú spolu 17 rokov.
Hop má dvakrát toľko rokov čo Skok a Skacko je o tri roky mladší ako Skok.
Označ Skokov vek x.

a Vyjadri vek všetkých troch klokanov pomocou x.

Hop ..... $2x$
Skok x
Skacko .... $x - 3$

b Napíš rovnicu, ktorá zodpovedá súčtu veku klokanov, a urč vek každého klokana.

.... $2 \cdot 5 = 10$ rokov
..... 5 rokov
..... $5 - 3 = 2$ roky

$2x + x + (x - 3) = 17$
$4x - 3 = 17$
$4x = 20$
$x = 5$

A11 Marko mal riešiť úlohu:
Mia spravila päťkrát viac sed-ľahov ako Iva.
Lea ich spravila o 35 viac ako Iva.
Zoe spravila o 12 sed-ľahov menej ako Lea.
Koľko sed-ľahov spravila každá, ak spolu ich spravili 162?
Počet sed-ľahov jednotlivých dievčat si Marko najprv znázornil štvorčekmi neznámej hodnoty, aby sa mu ľahšie zostavila rovnica. Dokonči riešenie úlohy podľa Markovho postupu.

Iva ..... $\boxed{x}$
Mia .... $\boxed{x}\boxed{x}\boxed{x}\boxed{x}\boxed{x}$
Lea .... $\boxed{x + 35}$
Zoe .... $\boxed{x + 35} - 12$

$x + 5x + (x + 35) + ((x + 35) - 12) = 162$
$x + 5x + x + 35 + x + 23 = 162$
$8x + 58 = 162 \quad /-58$
$8x = 104 \quad /:8$
$x = 13$

Ida spravila 13 sed-ľahov, Mia 65, Lea 48 a Zoe 36.

4 Pytagorova veta

A1 Ktorá trojica čísel sem podľa teba nepatrí a ktorou trojicou ju môžeš nahradiť? Zdôvodni svoj názor.

A: 7, 7, 7
B: 8, 15, 17
C: 3, 4, 5
D: 5, 12, 13

Nepatrí sem trojica A, lebo trojice B, C aj D môžu byť dĺžkami strán pravouhlých trojuholníkov. Trojica 7, 7, 7 sa dá nahradiť napr. trojicou 6, 8, 10, lebo $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Žiaci môžu uviesť odpoveď A aj preto, lebo v ostatných trojiciach sú všetky čísla iné, čo by bolo tiež správne zdôvodnenie. Keby trojicu nahradili nepytagorejskou trojicou, zadajte im úlohu, v ktorej majú opäť jednu trojicu vylúčiť. Tu už pravdepodobne dospejú k pytagorejským trojuholníkom.

A2 Žiaci mali vylúčiť jednu trojicu čísel a uviesť dôvod svojho rozhodnutia. S kým súhlasíš a prečo?

A: 6, 8, 10
B: 40, 42, 9
C: 9, 12, 15
D: 11, 60, 61

Nika: „Nepatrí sem trojica A, lebo má všetky čísla párne.“
Vilo: „Nepatrí sem trojica B, lebo neobsahuje strany pravouhlého trojuholníka.“
Anna: „Nepatrí sem trojica B, lebo v ostatných sú čísla usporiadané vzostupne.“

Všetky odpovede sú svojím spôsobom správne, nie vždy existuje jediné správne riešenie. Na tabuľu môžete urobiť prehľad, koľko žiakov súhlasí s Nikou, s Vilom a koľko s Annou, a potom ich nechať diskutovať, ktoré zdôvodnenie je lepšie a prečo. Cieľom úlohy je podnietiť diskusiu a argumentáciu žiakov.

A3 Rozhodni o pravdivosti tvrdení, svoje rozhodnutie zdôvodni.

a Existuje jediný pravouhlý trojuholník s dĺžkami strán 5 a 7.

pravda – nepravda

Lebo strany 5, 7 môžu byť odvesny, ale 7 môže byť aj prepona a 5 odvesna.

b Existuje pravouhlý aj nepravouhlý trojuholník s dĺžkami strán 3 a 5.

pravda – nepravda

Lebo pravouhlý trojuholník je napr. s dĺžkami strán 3, 4, 5. Ak bude medzi stranami s dĺžkami 5 a 3 tupý uhol, zvyšné dva uhly budú mať v súčte menej ako 90° a teda ani jeden z nich nemôže byť pravý.

c Existuje trojuholník, ktorého dĺžky všetkých strán sú desatinné čísla a platí v ňom Pytagorova veta.

pravda – nepravda

Lebo je to napr. trojuholník s dĺžkami strán 0,3 dm, 0,4 dm a 0,5 dm.

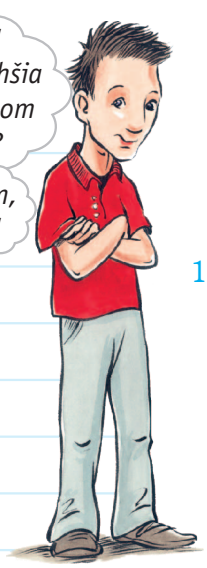
d Existuje pytagorejský trojuholník, ktorého dĺžky strán nie sú prirodzené čísla.

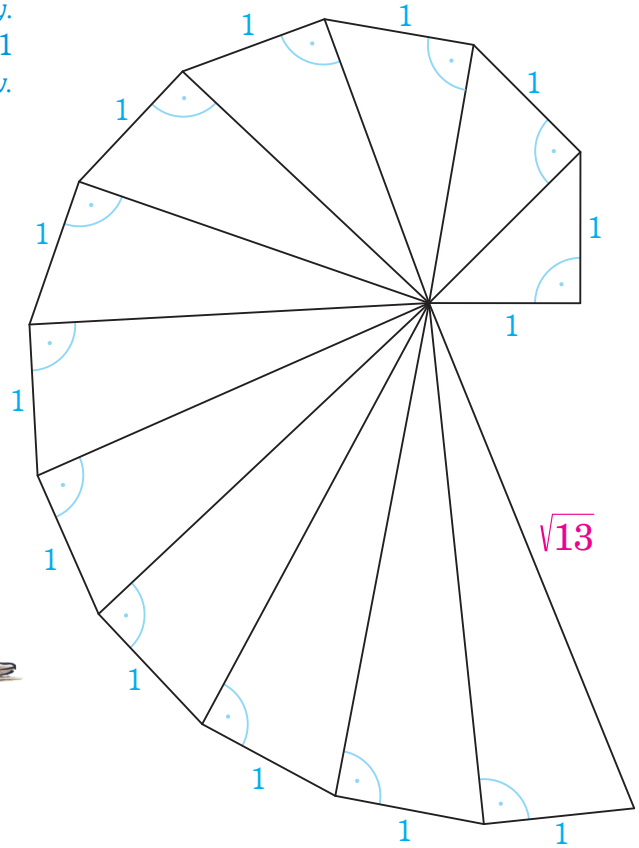
pravda – nepravda

Lebo napr. trojuholník s neceločíselnými dĺžkami strán 0,3 dm, 0,4 dm a 0,5 dm je pytagorejský (pomer dĺžok jeho strán sa dá vyjadriť ako 3 : 4 : 5). Alebo by stačilo dĺžky vyjadriť v centimetroch a hneď vidno, že je pytagorejský.

Pytagorejský trojuholník je pravouhlý trojuholník, v ktorom sa pomer dĺžok jeho strán dá vyjadriť prirodzenými číslami.

A4 Monika zostrojovala v GeoGebre pravouhlé trojuholníky. Začala najmenším, rovnoramenným, s ramenami dĺžky 1 a pridávala ďalšie, až vytvorila špirálu z 12 trojuholníkov. Timo jej výtvor okomentoval.
Má Timo pravdu?
Zdôvodni svoj názor.





Nemá pravdu.
Ak si označíme trojuholníky od 1 po 12, tak dĺžky prepon sú:

△ 1 ..... $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

△ 2 ..... $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

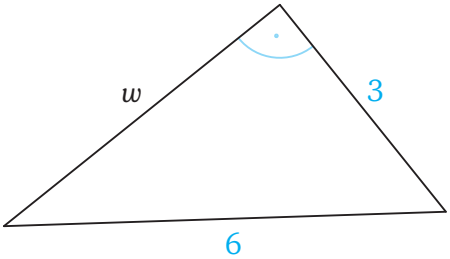
△ 3 ..... $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$

△ 4 ..... $\sqrt{1^2+(\sqrt{4})^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

... ...

△ 12 .... $\sqrt{1^2+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{1+12} = \sqrt{13}$

A5 Pomocou ktorého výrazu správne určíme dĺžku strany w v pravouhlom trojuholníku na obrázku? Svoj výber zdôvodni.



A: $w = \sqrt{6^2 - 3^2}$

B: $w = \sqrt{3^2 - 6^2}$

C: $w = 6^2 - 3^2$

D: $w = \sqrt{6^2 + 3^2}$

Pomocou výrazu A, pretože w je odvesna, teda platí: $w^2 = 6^2 - 3^2$.
Dĺžku strany w dostaneme odmocnením.

Diskutujte so žiakmi o všetkých možnostiach a aj o tom, prečo sú ostatné možnosti nesprávne. Ide o typické chyby, ktoré žiaci pri používaní Pytagorovej vety robia.

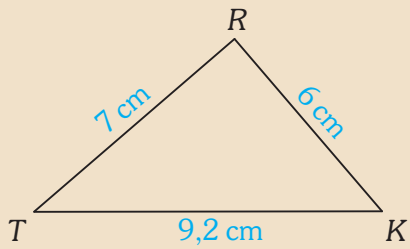
A6 Žiaci skúmali výpočet. Kto zo žiakov má pravdu a prečo?

Zina: „Trojuholník *KRT* je pravouhlý.“

Karol: „Trojuholník *KRT* nie je pravouhlý.“

Nina: „Výpočet nie je správny.“

Martin: „$6^2 + 7^2 = 9{,}2^2$“



$9{,}2^2 - 6^2 = 84{,}64 - 36 = 48{,}64$

$\sqrt{48{,}64} \approx 6{,}97$

Pravdu má iba Karol, lebo trojuholník *KRT* nie je pravouhlý – neplatí v ňom teda Pytagorova veta.
Ak by platila, dĺžka strany *RT* by musela byť približne 6,97 cm.
Uvedený výpočet je správny, Nina sa mýli.
Martinova rovnosť neplatí.

A7 Ema už vie, že trojuholník s dĺžkami strán 3, 4 a 5 je pravouhlý a platí, že $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pani učiteľka v škole hovorila, že z tohto trojuholníka možno odvodiť ďalšie pravouhlé trojuholníky tak, že všetky dĺžky strán vynásobíme rovnakým číslom.

a Over, či je to pravda, ak dĺžky vynásobíš rovnakým činiteľom x.

Dĺžky strán po vynásobení budú: $3x, 4x, 5x$

Overenie, či platí Pytagorova veta: $(3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2$

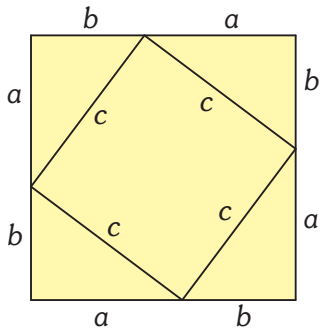
$$9x^2 + 16^2 = 25^2$$

$$25x^2 = 25x^2 \qquad \text{Platí!}$$

b Ktoré podmienky musia platiť pre činiteľa x?

$x > 0$ (Aby sme dostali kladné dĺžky strán nových trojuholníkov.)

A8 Existuje niekoľko dôkazov Pytagorovej vety o vzťahu medzi odvesnami a, b a preponou c pravouhlého trojuholníka. Samo skúšal dokončiť jeden, ktorý našiel na internete. Podľa obrázka doplň do dôkazu chýbajúce časti.



Obsah žltého štvorca (so stranou $a + b$): $(a + b)^2$

Súčet obsahov štyroch trojuholníkov a štvorca so stranou c: $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$

Oba výrazy vyjadrujú obsah toho istého štvorca, preto sa rovnajú: $(a + b)^2 = 4\frac{a \cdot b}{2} + c^2$

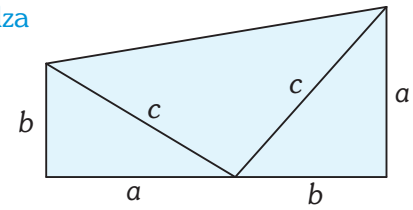
Upravíme výrazy na oboch stranách:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \qquad /-2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Aby bol dôkaz kompletný, bolo by ešte treba zdôvodniť, prečo je štvoruholník v strede štvorcom (lebo len vtedy je jeho obsah c^2). To môžete podľa uváženia urobiť so šikovnejšími žiakmi (pomocou vlastností uhlov v trojuholníkoch).

A9 Ďalší dôkaz Pytagorovej vety, ktorý Samo našiel na internete, pochádza z roku 1876 a prišiel naň vtedajší prezident USA James A. Garfield. Dva pravouhlé trojuholníky s odvesnami a, b a preponou c umiestnil tak, že doplnením jednej čiary vytvoril lichobežník. Pomôž Samovi vyjadriť obsah vzniknutého lichobežníka dvoma rôznymi spôsobmi a potom obsahy porovnaj.



Obsah lichobežníka pomocou vzorca $\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v$: $S = \frac{(a + b) \cdot (a + b)}{2}$

Obsah lichobežníka vyjadrený ako obsah 3 pravouhlých trojuholníkov: $S = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$

Porovnanie obsahov: $\frac{(a + b) \cdot (a + b)}{2} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \qquad /\cdot 2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \qquad /-2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Garfieldov obrázok je „polovica“ obrázka z úlohy 8.

Tu by opäť bolo potrebné kvôli kompletnosti zdôvodniť, ako vieme, že trojuholník s ramenami c je pravouhlý.