I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

Argumentácia v matematike

pre 9. ročník ZŠ
a 4. ročník GOŠ

1. zošit

Projekt **MaTeK**

Orbis**P**ictus**I**stropolitana

1 Mocniny a odmocniny

A1 Mama vysvetľovala Eme, aký je rozdiel medzi umocnením a násobením.

a Doplň chýbajúce čísla a slová.

Násobenie: $5 \cdot 3 = _ + _ + _ = _$ Násobenie je opakované _____.

Umocnenie: $5^3 = _ \cdot _ \cdot _ = _$ Umocnenie je opakované _____.

b Potom to mama ešte vysvetľovala opačne. Doplň chýbajúci text.

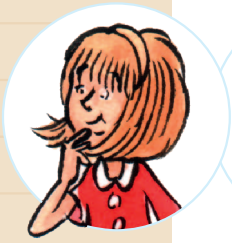
Opakované sčítanie, napr. $a + a + a + a = _$, môžeš nahradiť _____.

Opakované násobenie, napr. $a \cdot a \cdot a \cdot a = _$, môžeš nahradiť _____.

A2 Ema a Filip vyriešili tú istú úlohu v písomke rôznymi spôsobmi. Kto z nich to vyriešil správne? Ak niekto z nich urobil chybu, vysvetli akú a napíš aj správne riešenie.

$3^5 + 3^5 + 3^5 = ?$

$15 + 15 + 15 = 45$



$3^5 + 3^5 + 3^5 = ?$

$5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 =$

$= 125 + 125 + 125 =$

$= 375$

A3 Pán učiteľ napísal na 4 karty 4 rôzne číselné výrazy s mocninami. Nájdi výrazy, ktoré majú rovnakú hodnotu.

a $2^3 \times 2^3$

b $(2^3)^2$

c 2^6

d 4^3

A4 **a** Doplň tabuľku hodnôt mocniny desiatky.

10^4	10^3	10^2	10^1
10 000			

b Pozoruj, ako sa menia hodnoty mocnín s klesajúcim mocniteľom. Čo si všimneš?

c Ako asi pokračuje tabuľka pre ďalšie hodnoty v tejto postupnosti?

10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

A5 Majka upravovala výrazy s mocninami. Nebola si však istá, či má všetko správne. Skontroluj jej riešenia a tam, kde má chybu, vysvetli, prečo je jej riešenie nesprávne.

a $5a^2 - 5 = a^2$ **správne – nesprávne**

b $a^2 + a^3 = a^5$ **správne – nesprávne**

c $b^2 + (3b)^2 = 10b^2$ **správne – nesprávne**

d $\frac{20b^8}{4b^2} = 5b^4$ **správne – nesprávne**

A6 Viktor vymyslel tvrdenie o druhej a tretej mocnine.

a Nájdi takú hodnotu čísla x, pre ktorú je Viktorovo tvrdenie pravdivé.

b Nájdi takú hodnotu čísla x, aby Viktorovo trvdenie **nebolo** pravdivé.

c Existuje hodnota čísla x, ktorej druhá aj tretia mocnina sú rovnaké?

d Preformuluj Viktorovo tvrdenie o vzťahu druhej a tretej mocniny tak, aby bolo pravdivé vždy.

A7 Žiaci mali určiť, ktorá kocka má najväčší objem, pričom mali zadané dĺžky ich hrán. S kým súhlasíš a prečo?

kocka 1	kocka 2	kocka 3
$a = 0{,}5$ dm	$a = 5$ cm	$a = 50$ mm

A8 Danka overovala platnosť tvrdení tak, že za písmená dosadila nejaké čísla. Pri každom jej vyšlo, že tvrdenie platí. Ktoré čísla mohla v jednotlivých tvrdeniach dosadiť? Sú tieto tvrdenia naozaj pravdivé vždy? Prečo?

a

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr.

Lebo

b

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr.

Lebo

c

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2$$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr.

Lebo

d

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr.

Lebo

e

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Napr.

Lebo

A9 Katka našla na internete návod, ako sa dá ľahko vypočítať druhá odmocnina z čísel 64 a 25.

$\sqrt[2]{64} = 8$ (10 – 2)

$\sqrt[2]{25} = 5$ (7 – 2)

a Ktoré číslo by podľa tohto návodu bolo treťou odmocninou zo 125?

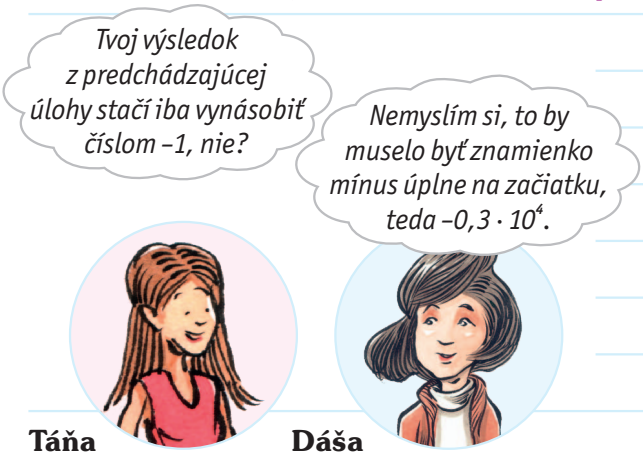
$\sqrt[3]{125} = ?$

b Niektorí komentujúci však tvrdili, že tento návod nefunguje pre ľubovoľné prirodzené číslo. Majú pravdu? Prečo?

A10 Ktoré číslo je väčšie, $47{,}3 \cdot 10^6$ alebo $1{,}108 \cdot 10^8$? Zdôvodni svoju odpoveď bez použitia kalkulačky.

A11 **a** Táňa a Dáša určovali hodnotu čísla $0{,}3 \cdot 10^4$. S ktorým z dievčat súhlasíš a prečo?

b Neskôr mali určiť, či je číslo $0{,}3 \cdot 10^{-4}$ väčšie alebo menšie ako nula. Je číslo $0{,}3 \cdot 10^{-4}$ kladné alebo záporné? S ktorým z dievčat súhlasíš a prečo?



A12 Na svete je približne osem miliárd ľudí. Vedci vypočítali, že keby existoval svet len so 100 ľuďmi, 20 z nich by boli deti, 25 ľudí by nemalo jedlo a prístrešie, 17 ľudí by hovorilo po čínsky a 8 by hovorilo po anglicky. Na základe uvedených údajov odpovedz na nasledujúce otázky a vysvetli, prečo sú tvoje odpovede správne.

a Aká časť ľudí na svete, vyjadrená zlomkom, nemá jedlo a prístrešie?

b Koľko je v súčasnom svete detí?

c O koľko viac ľudí v súčasnom svete hovorí po čínsky ako po anglicky?

d V USA žije približne $3{,}3 \cdot 10^8$ ľudí. Koľko ľudí vo svete so 100 ľuďmi by žilo v USA?

A13 Jana, Katka a Adam si zapisovali všetky číselné údaje z textu vedeckým zápisom.

Na Zemi sa nachádza celkovo 1 260 000 000 000 000 000 000 litrov vody.
Minimálne 1,8 miliardy ľudí používa zdroje pitnej vody kontaminované fekáliami.
Každý deň sa zo zemského povrchu vyparuje asi bilión ton vody.
Na výrobu jedného kilogramu kávy je potrebných až 11 000 litrov vody.

a Zakrúžkuj všetky vedecké zápisy, ktoré sú správne.

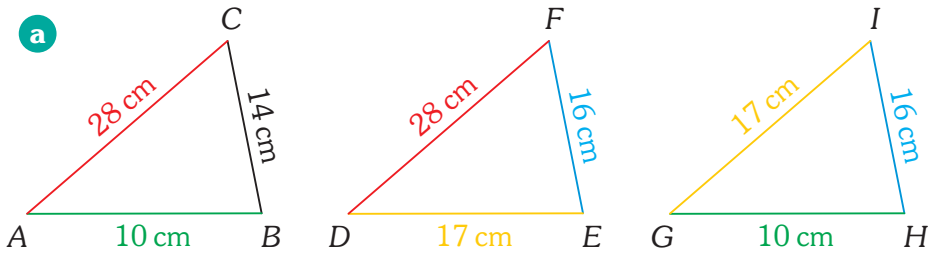
	Jana	Katka	Adam
Množstvo vody na Zemi	$126 \cdot 10^{19}$	$1{,}26 \cdot 10^{21}$	$12{,}6 \cdot 10^{20}$
Počet ľudí pijúcich kontaminovanú vodu	$1{,}8 \cdot 10^{9}$	$18 \cdot 10^{9}$	$1{,}8 \cdot 10^{8}$
Množstvo vody vyparenej za deň	$1\,000 \cdot 10^{9}$	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	$1 \cdot 10^{12}$
Spotreba vody na výrobu 1 kg kávy	$11 \cdot 10^{3}$	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	$1{,}1 \cdot 10^{3}$

b Akú najčastejšiu chybu urobili Jana, Katka a Adam a čo by mala pani učiteľka v škole ešte zdôrazniť?

2 Ďalšie konštrukcie trojuholníka

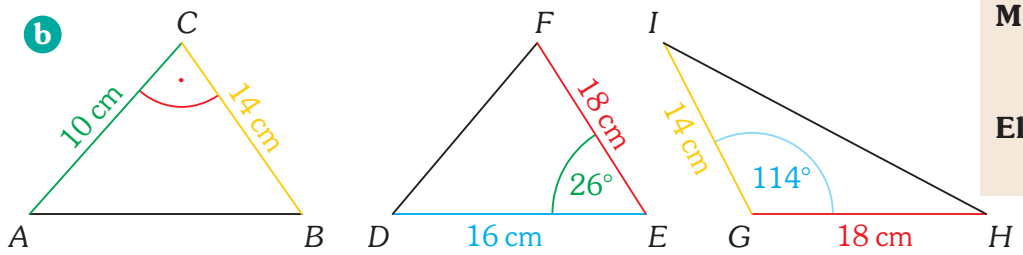
A1 Milan a Eliška mali rozhodnúť, či sa trojuholníky na obrázku dajú zostrojiť. Rozhodni, či sú ich úvahy správne. Ak nie, vysvetli, kde spravili chybu.

a



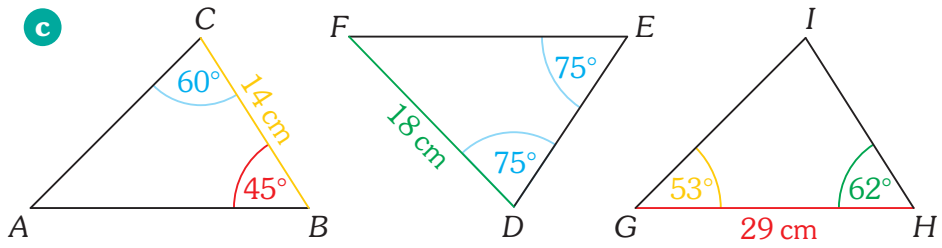
Milan: „Všetky trojuholníky sa dajú zostrojiť podľa vety *sss*."
Eliška: „Veta *sss* dáva zmysel, ale podľa mňa to ešte treba nejak overiť. Nepamätám si ako."

b

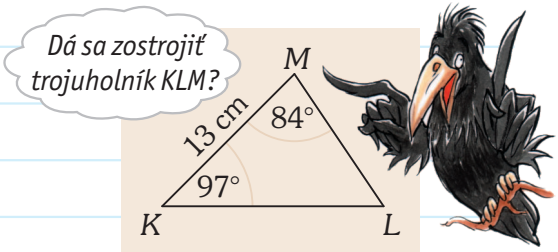


Milan: „Všetky trojuholníky sa dajú zostrojiť podľa vety *sus*."
Eliška: „Áno, mali by sa dať zostrojiť."

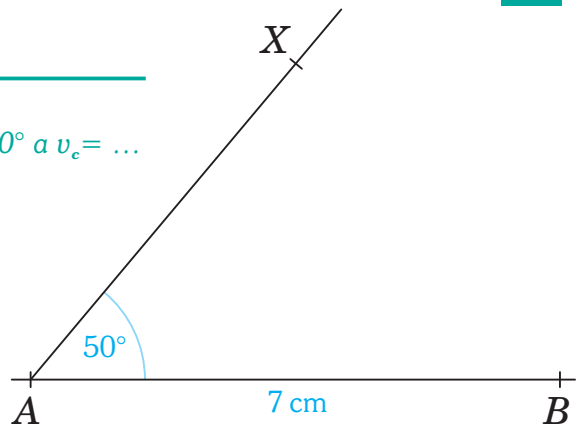
c



Milan: „Podľa vety *usu* viem zostrojiť △*ABC* a △*GHI*. Pre △*DEF* to neplatí, ale neviem vysvetliť prečo."
Eliška: „△*DEF* sa tiež dá zostrojiť, len treba niečo dopočítať..."



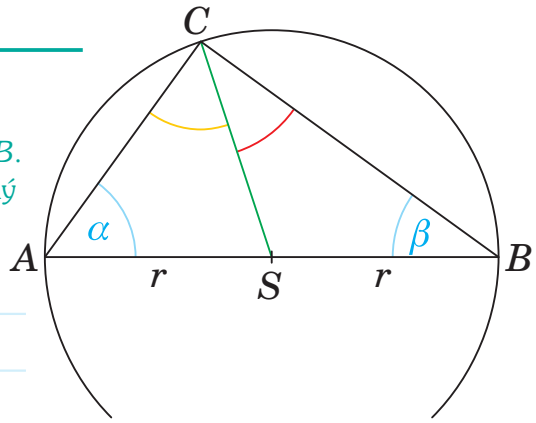
A2 Na obrázku je časť konštrukcie podľa zadania:
Zostrojte trojuholník ABC, ak |AB| = 7 cm, |∢BAC| = 50° a v_c = …



a Aká by mala byť dĺžka v_c, aby sa trojuholník dal zostrojiť? Zdôvodni svoje riešenie.

b Aká by mala byť dĺžka v_c, aby mala úloha dve riešenia?

A3 Dominika narysovala úsečku *AB*, našla jej stred *S* a zostrojila kružnicu so stredom v bode *S* a polomerom $r = \frac{1}{2}|AB|$. Na kružnici si zvolila bod *C* a spojila ho úsečkami s bodmi *A*, *B*. Vznikol pravouhlý trojuholník *ABC*. Zaujímala sa, či je pravouhlý iba náhodou. Preto chcela určiť veľkosť uhla pri vrchole *C* bez merania a riešenie zdôvodniť. Riešenie si rozkrokovala.

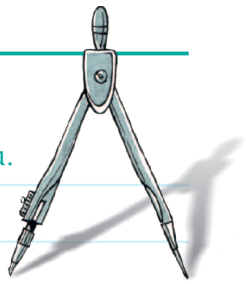


a Doplň chýbajúci text.

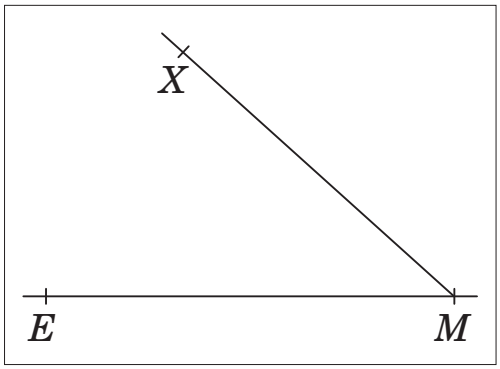
1. Úsečka *SC* má veľkosť _____.
2. Trojuholník *ASC* je teda _____, preto veľkosť uhla *ACS* je _____.
   Trojuholník *SBC* je tiež rovnoramenný, preto veľkosť uhla *BCS* je _____.
3. V každom trojuholníku je súčet veľkostí jeho vnútorných uhlov _____.
   V trojuholníku *ABC* teda platí: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) =$ _____.

b Posledný výraz zjednoduš a urč, čomu sa rovná $\alpha + \beta$ (t. j. veľkosť uhla pri vrchole *C*).

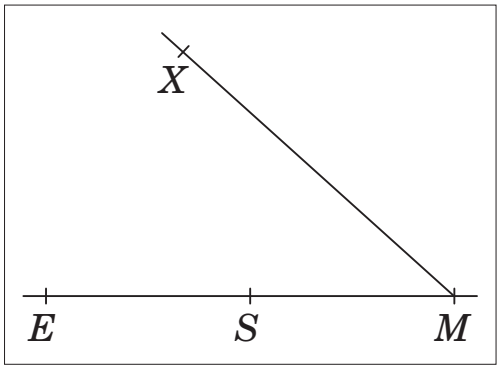
A4 Emil sa snažil narysovať trojuholník podľa zadania:
Zostrojte trojuholník EMA, ak |EM| = 5,4 cm, |∢EMA| = 42° a t_a = 4 cm.
Pani učiteľka mu pri kontrole prezradila, že pri konštrukcii urobil v jednom kroku chybu.



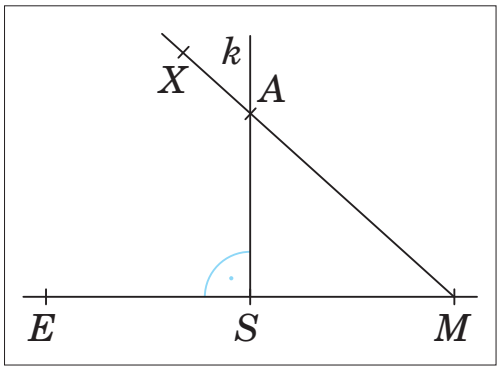
1. Narysoval úsečku *EM*, čiže stranu *a* trojuholníka *EMA*.



2. Zostrojil uhol *EMX*.



3. Narysoval stred strany *a*, aby mohol zostrojiť ťažnicu.

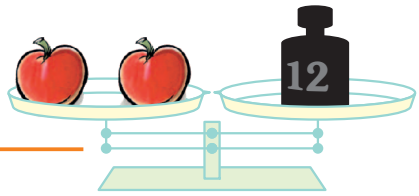


4. Cez bod *S* narysoval kolmicu na stranu *a* a tam, kde sa pretla s ramenom *MX*, vznikol vrchol *A*.

a Vysvetli, prečo Emilov postup nie je správny.

b Dá sa určiť, koľko riešení bude mať úloha, bez toho, aby sme trojuholník rysovali?

3 Lineárne rovnice



A1 Ktorá z rovníc sem nepatrí? Zdôvodni prečo.

A: $2x = 12$

B: $x + 2 = 8$

C: $x - 4 = 2$

D: $x = 3x - 6$

A2 **a** Ku každej rovnici napíš, ktorú ekvivalentnú úpravu je vhodné urobiť ako prvú.

b Ktorá z rovníc sem nepatrí a prečo?

A: $6 + 5x = 8$

B: $5x - 8 = 12$

C: $6 + 5x = 7$

D: $5x = 25$

E: $\frac{2}{3}x = 56$

F: $6x + 9 = 3$

G: $3x = 9$

H: $8 = 2x - 1$

A3 Žiaci mali na písomke vyriešiť 4 rovnice. Za každú mohli získať 2 body.

a Oprav Soninu písomku.

(1)
$$\begin{aligned} 2z + 3 &= 3z + 4 && /+3 \\ 2z &= 3z + 7 && /-3z \\ -z &= 7 && /\cdot(-1) \\ z &= -7 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 5 - 8 &= 3y - 2 && /+8 \\ 5 &= 3y + 10 && /-10 \\ 15 &= 3y && /:3 \\ 5 &= y \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 4 \cdot (4 - 1) &= 6x - 6 \\ 16 - 1 &= 6x - 6 \\ 15 &= 6x - 6 && /+6 \\ 21 &= 6x && /:6 \\ x &= \frac{21}{6} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} 2x + 6 &= x + 2 && /-6 \\ 2x &= x - 4 && /-x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

b Koľko bodov by asi dostala Soňa od pani učiteľky za túto písomku a prečo?

A4 Žiaci chodili v dvojiciach k tabuli a ich úlohou bolo pri riešení rovníc zvoliť vhodnú ekvivalentnú úpravu. Vysvetli ich postup a oprav prípadné chyby.

a

$$\frac{1}{2}(x-4)+\frac{1}{4}(x+3)=5 \qquad /\cdot 4$$

$$2(x-4)+(x+3)=5$$

$$\frac{1}{2}(x-4)+\frac{1}{4}(x+3)=5 \qquad /\cdot 2$$

$$(x-4)+2(x+3)=10$$

b

$$-4x-6=12-2x \qquad /-4x$$

$$6=12-2x-4x$$

$$6=12-6x$$

$$-4x-6=12-2x \qquad /+2x$$

$$-4x-6+2x=12$$

$$-2x-6=12$$

c

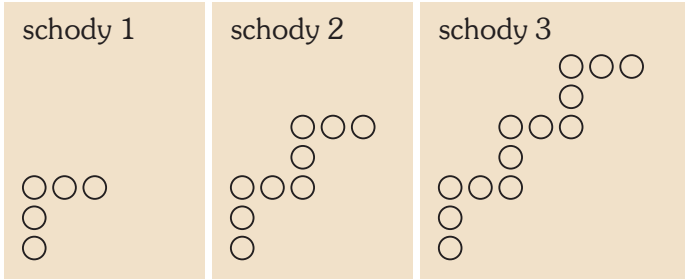
$$8x=4 \qquad /:8$$

$$x=0{,}5$$

$$8x=4 \qquad /:4$$

$$x=2$$

A5 Mia kreslila schody z bodiek podľa určitého pravidla.



a Koľko bodiek budú mať schody číslo 4, 5 a 10? Odpoveď zdôvodni.

Schody číslo	1	2	3	4	5	10
Počet bodiek						

b Z koľkých bodiek pozostávajú schody číslo 100, 1 000 a 1 001 v tejto postupnosti? Odpoveď zdôvodni.

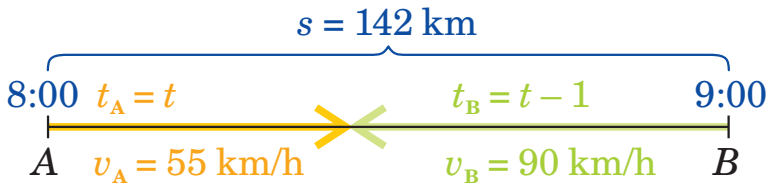
c Mia napísala výraz, pomocou ktorého sa dá určiť počet bodiek b_n v ľubovoľných schodoch číslo n. Je výraz správny? Vysvetli, čo, podľa teba, reprezentujú jednotlivé časti výrazu.

$$b_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$$

b Otec tvrdil, že existujú schody, ktoré pozostávajú presne z 2 345 bodiek. Mia dosadila počet bodiek do výrazu a vyriešila rovnicu s neznámou n. Čo jej vyšlo? Mal otec pravdu?

A6 Samo mal za domácu úlohu dokončiť riešenie slovnej úlohy na pohyb. Je Samovo riešenie správne? Aká by mala byť jeho odpoveď na otázku?

Dve mestá sú od seba vzdialené 142 km.
Z mesta A vyrazí o 8:00 auto, ktoré ide priemernou rýchlosťou 55 km/h.
Z mesta B auto vyrazí až o 9:00 priemernou rýchlosťou 90 km/h.
Koľko bude hodín, keď sa autá stretnú?



$s_A = v_A \cdot t_A$

$s_A = 55 \cdot t$

$s_B = v_B \cdot t_B$

$s_B = 90 \cdot (t - 1)$

$s_B = 90t - 90$

$s = s_A + s_B$

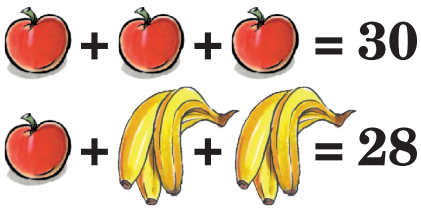
$142 = 55t + 90t - 90$

$142 = 145t - 90 \quad /+ 90$

$232 = 145t \quad /: 145$

$t = 1{,}6\ \text{h}$

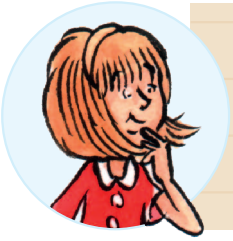
A7 Veronika videla na internete úlohu, v ktorej bolo treba určiť hodnotu jedného banána. Do komentára napísala:
„To je super ľahké, banán má hodnotu 9.“
Jej babka Veronikinu odpoveď okomentovala:
„Veronička moja, nemáš to dobre.“
Ako Veronike vysvetlíš, prečo je jej odpoveď nesprávna?



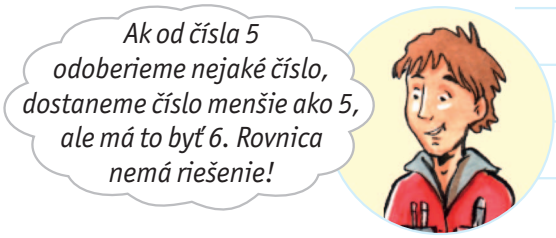
A8 Ktorá z rovníc je správna na vyriešenie nasledujúcej úlohy?
„Myslím si číslo, pripočítam k nemu 8 a výsledok vynásobím 3. Dostanem číslo 66. Ktoré číslo som si myslel?“

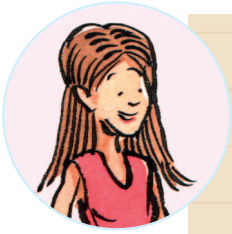
$x + 24 = 66$	$3x + 8 = 66$
$3x + 24 = 66$	$3(x + 8) = 66$

A9 Liana a Boris riešili rovnicu $5 - x = 6$.



$$5 - x = 6$$
$$x = 6 - 5$$
$$x = 1$$





$$5 - x = 6$$
$$x - 5 = 6 \quad /+5$$
$$x = 11$$

a Kto z nich vyriešil rovnicu správne? Svoju odpoveď zdôvodni.

b Klára riešila tú istú rovnicu. Ako jej vysvetlíš, že $5 - x = 6$ nie je to isté ako $x - 5 = 6$?

A10 Tri klokany, Hop, Skok a Skacko, majú spolu 17 rokov. Hop má dvakrát toľko rokov čo Skok a Skacko je o tri roky mladší ako Skok. Označ Skokov vek x.

a Vyjadri vek všetkých troch klokanov pomocou x.

Hop .....

Skok x

Skacko ....

b Napíš rovnicu, ktorá zodpovedá súčtu veku klokanov, a urč vek každého klokana.

A11 Marko mal riešiť úlohu:

Mia spravila päťkrát viac sed-ľahov ako Iva.
Lea ich spravila o 35 viac ako Iva.
Zoe spravila o 12 sed-ľahov menej ako Lea.
Koľko sed-ľahov spravila každá, ak spolu ich spravili 162?

Počet sed-ľahov jednotlivých dievčat si Marko najprv znázornil štvorčekmi neznámej hodnoty, aby sa mu ľahšie zostavila rovnica. Dokonči riešenie úlohy podľa Markovho postupu.

Iva ..... $\boxed{x}$

Mia ....

Lea .... $\boxed{x} + 35$

Zoe ....

4 Pytagorova veta

A1 Ktorá trojica čísel sem podľa teba nepatrí a ktorou trojicou ju môžeš nahradiť? Zdôvodni svoj názor.

A: 7, 7, 7

B: 8, 15, 17

C: 3, 4, 5

D: 5, 12, 13

A2 Žiaci mali vylúčiť jednu trojicu čísel a uviesť dôvod svojho rozhodnutia. S kým súhlasíš a prečo?

A: 6, 8, 10

B: 40, 42, 9

C: 9, 12, 15

D: 11, 60, 61

Nika: „Nepatrí sem trojica A, lebo má všetky čísla párne.“

Vilo: „Nepatrí sem trojica B, lebo neobsahuje strany pravouhlého trojuholníka.“

Anna: „Nepatrí sem trojica B, lebo v ostatných sú čísla usporiadané vzostupne.“

A3 Rozhodni o pravdivosti tvrdení, svoje rozhodnutie zdôvodni.

a Existuje jediný pravouhlý trojuholník s dĺžkami strán 5 a 7.

pravda – nepravda Lebo

b Existuje pravouhlý aj nepravouhlý trojuholník s dĺžkami strán 3 a 5.

pravda – nepravda Lebo

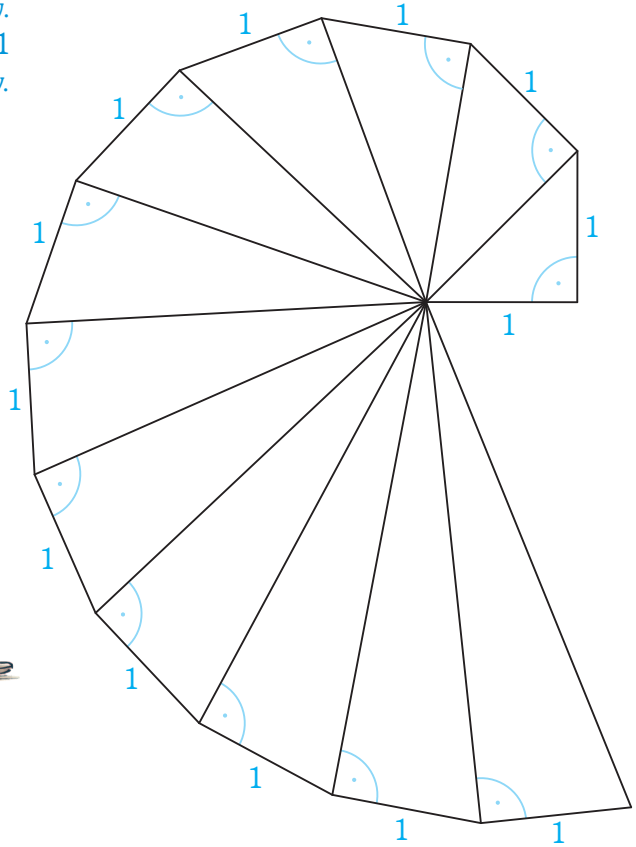
c Existuje trojuholník, ktorého dĺžky všetkých strán sú desatinné čísla a platí v ňom Pytagorova veta.

pravda – nepravda Lebo

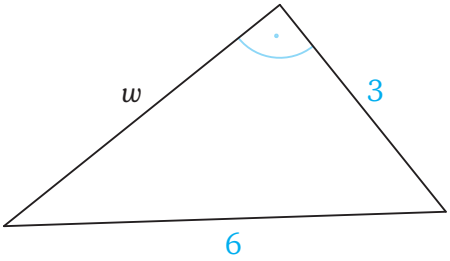
d

pravda – nepravda Lebo

A4 Monika zostrojovala v GeoGebre pravouhlé trojuholníky. Začala najmenším, rovnoramenným, s ramenami dĺžky 1 a pridávala ďalšie, až vytvorila špirálu z 12 trojuholníkov. Timo jej výtvor okomentoval.
Má Timo pravdu?
Zdôvodni svoj názor.



A5 Pomocou ktorého výrazu správne určíme dĺžku strany w v pravouhlom trojuholníku na obrázku? Svoj výber zdôvodni.



A: $w = \sqrt{6^2 - 3^2}$

B: $w = \sqrt{3^2 - 6^2}$

C: $w = 6^2 - 3^2$

D: $w = \sqrt{6^2 + 3^2}$

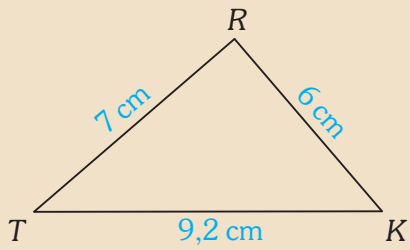
A6 Žiaci skúmali výpočet. Kto zo žiakov má pravdu a prečo?

Zina: „Trojuholník *KRT* je pravouhlý.“

Karol: „Trojuholník *KRT* nie je pravouhlý.“

Nina: „Výpočet nie je správny.“

Martin: „$6^2 + 7^2 = 9{,}2^2$“



$$9{,}2^2 - 6^2 = 84{,}64 - 36 = 48{,}64$$

$$\sqrt{48{,}64} \approx 6{,}97$$

A7 Ema už vie, že trojuholník s dĺžkami strán 3, 4 a 5 je pravouhlý a platí, že $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pani učiteľka v škole hovorila, že z tohto trojuholníka možno odvodiť ďalšie pravouhlé trojuholníky tak, že všetky dĺžky strán vynásobíme rovnakým číslom.

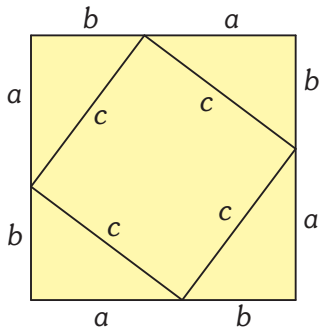
a Over, či je to pravda, ak dĺžky vynásobíš rovnakým činiteľom x.

Dĺžky strán po vynásobení budú:

Overenie, či platí Pytagorova veta:

b Ktoré podmienky musia platiť pre činiteľa x?

A8 Existuje niekoľko dôkazov Pytagorovej vety o vzťahu medzi odvesnami a, b a preponou c pravouhlého trojuholníka. Samo skúšal dokončiť jeden, ktorý našiel na internete. Podľa obrázka doplň do dôkazu chýbajúce časti.



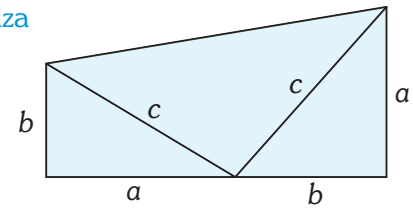
Obsah žltého štvorca (so stranou $a + b$):

Súčet obsahov štyroch trojuholníkov a štvorca so stranou c:

Oba výrazy vyjadrujú obsah toho istého štvorca, preto sa rovnajú:

Upravíme výrazy na oboch stranách:

A9 Ďalší dôkaz Pytagorovej vety, ktorý Samo našiel na internete, pochádza z roku 1876 a prišiel naň vtedajší prezident USA James A. Garfield. Dva pravouhlé trojuholníky s odvesnami a, b a preponou c umiestnil tak, že doplnením jednej čiary vytvoril lichobežník. Pomôž Samovi vyjadriť obsah vzniknutého lichobežníka dvoma rôznymi spôsobmi a potom obsahy porovnaj.



Obsah lichobežníka pomocou vzorca $\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v$:

Obsah lichobežníka vyjadrený ako obsah 3 pravouhlých trojuholníkov:

Porovnanie obsahov: