I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

8

# Argumentácia v matematike

pre 8. ročník ZŠ
a 3. ročník GOŠ

## 2. zošit

Projekt **MaTeK**

**O**rbis**P**ictus**I**stropolitana

# 6 Pravouhlá sústava súradníc

**A1** Dané sú body $A[1, 3]$, $B[5, -1]$, $C[-1, 1]$.
Bez znázorňovania v súradnicovej sústave odpovedz na nasledujúce otázky. Odpovede zdôvodni.

**a** Ktorý z bodov je najbližšie k osi $x$?

Vzdialenosť od osi $x$ vyjadruje $y$-ová súradnica bodov.
Najmenšiu (a rovnakú) vzdialenosť od osi $x$ majú body $B$ a $C$.

**b** Ktorý z bodov je najďalej od osi $y$?

Vzdialenosť od osi $y$ vyjadruje $x$-ová súradnica bodov.
Najväčšiu vzdialenosť od osi $y$ má bod $B$.

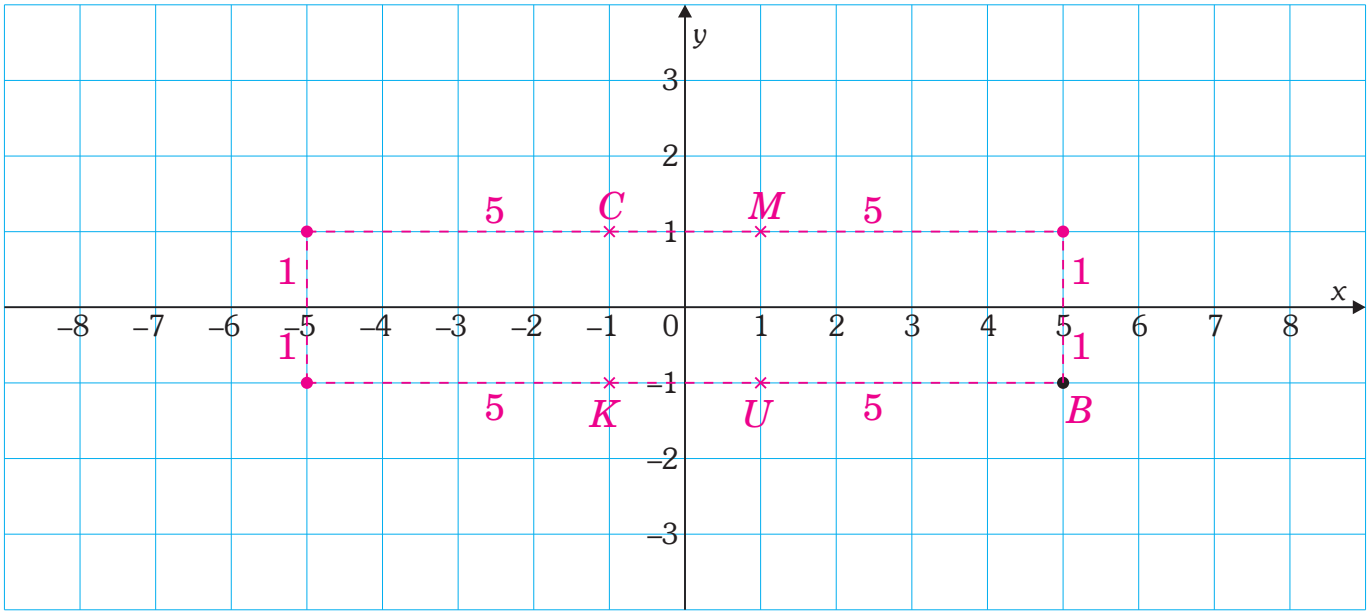
**c** Existuje bod, ktorého vzdialenosť od súradnicových osí je rovnaká ako vzdialenosť bodu $B[5, -1]$, ale s inými súradnicami? Ak áno, je jediný? Vysvetli to.

Bod $[5, -1]$ má od osi $x$ vzdialenosť 1 a od osi $y$ vzdialenosť 5.
Okrem neho existujú 3 ďalšie body, ktoré budú mať od súradnicových osí rovnaké vzdialenosti. Sú to body $[5, 1]$, $[-5, -1]$ a $[-5, 1]$.

*Tu si už môžeš pomôcť súradnicovou sústavou.*

**d** Ak je bod $C$ vrcholom štvorca $CMUK$, ktorého stred leží v počiatku súradnicovej sústavy, aké sú súradnice bodu $U$? Zdôvodni svoje riešenie.

Bod $U$ je stredovo súmerný podľa počiatku súradnicovej osi s bodom $C$ (lebo uhlopriečky štvorca sa polia), preto jeho súradnice sú $[1, -1]$.



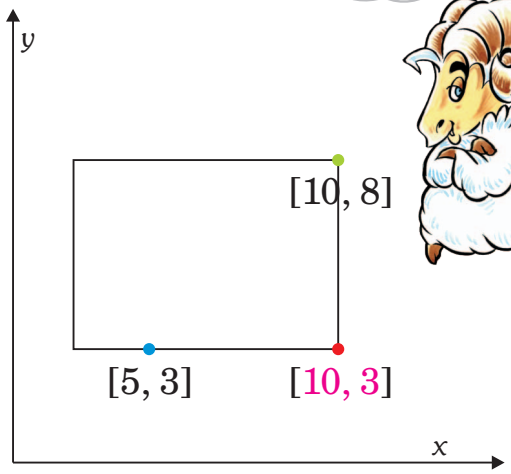
## A2

Urč súradnice červeného bodu, ak poznáš súradnice zeleného a modrého bodu, ktoré ležia na stranách obdĺžnika. Zdôvodni, prečo je tvoje riešenie správne.

Súradnice sú [10, 3].

Červený bod má $x$-ovú súradnicu rovnakú ako zelený bod, lebo obidva body ležia v danom obdĺžniku nad sebou.

Podobne je to s $y$-ovou súradnicou a modrým bodom (ležia vedľa seba).




## A3

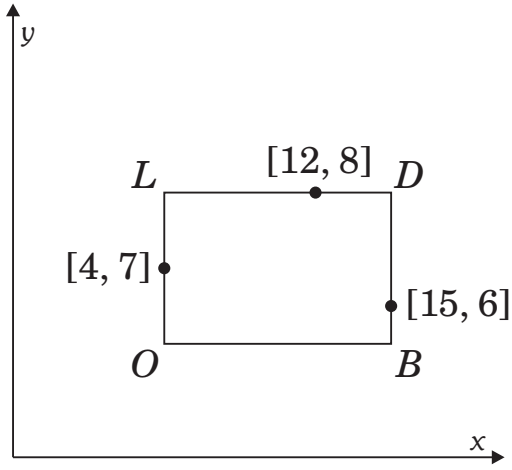
Žiaci mali určiť súradnice všetkých vrcholov obdĺžnika *OBDL*.
Nina sa prihlásila a povedala: „To sa nedá! Presnejšie, nie pre všetky body."

**a** Má Nina pravdu? Prečo?

Má pravdu, lebo pre body *O* a *B* nevieme určiť $y$-ovú súradnicu, keďže nepoznáme žiaden bod na strane *OB* a teda nevieme, ako „vysoko" body ležia. Vieme iba povedať, že je to menej ako 6 a viac ako 0.

**b** Urč súradnice vrcholov *O, B, D, L*.

*O*[4, ?], *B*[15, ?], *D*[15, 8], *L*[4, 8]

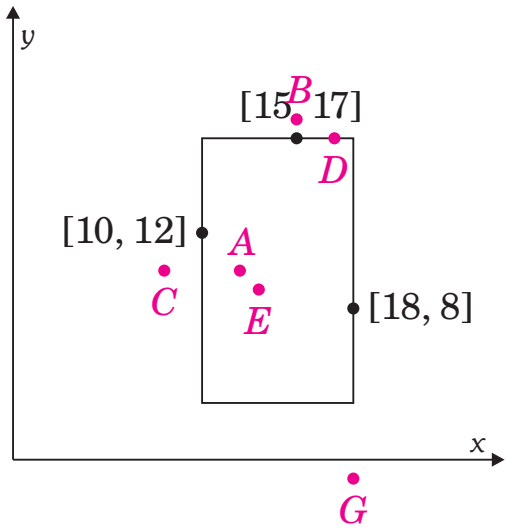



## A4

V súradnicovej sústave je daný obdĺžnik a tri body na jeho stranách.
Pre každý bod v tabuľke rozhodni, či leží vnútri, na strane alebo mimo obdĺžnika.

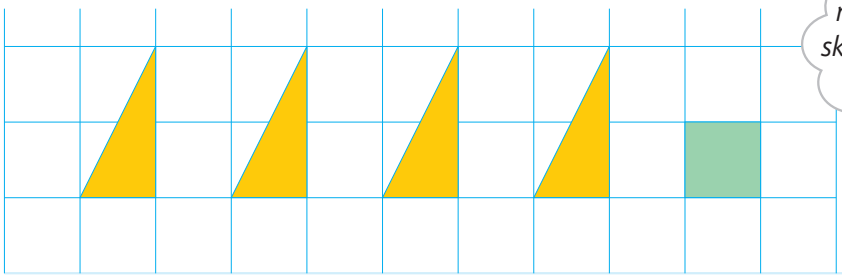
| | Vnútri | Na strane | Mimo |
|---|---|---|---|
| *A* [12, 10] | × | | |
| *B* [15, 18] | | | × |
| *C* [8, 10] | | | × |
| *D* [17, 17] | | × | |
| *E* [13, 9] | × | | |
| *F* [10, 2] | | ? | |
| *G* [18, –1] | | | × |

*Diskutujte so žiakmi, prečo nie je možné určiť polohu bodu F.*



## A5

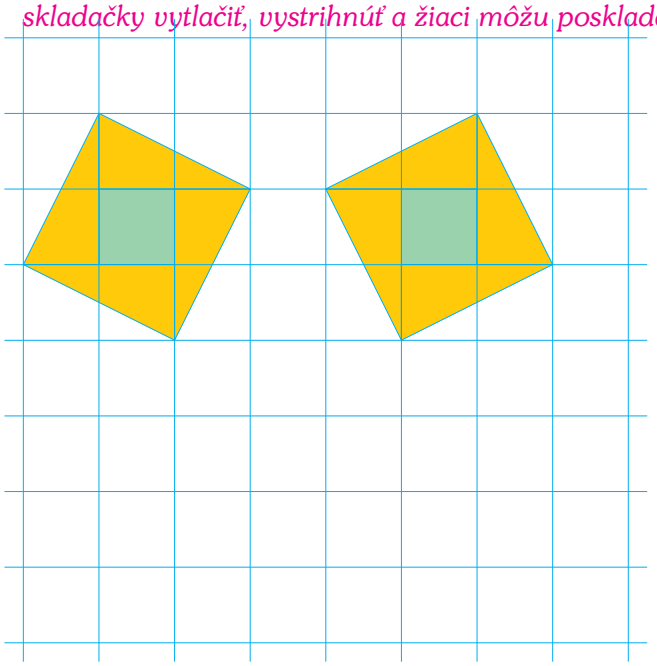
Žiaci dostali päť častí skladačky, z ktorých mali poskladať štvorec a nalepiť ho do súradnicovej sústavy tak, aby jeden z jeho vrcholov ležal v bode [0, 0]. Podmienkou však bolo, aby všetky jeho ostatné vrcholy boli mrežovými bodmi. Spolužiaci Ivka a Mišo majú rôzne riešenia.
Rozhodni, kto z nich má pravdu.

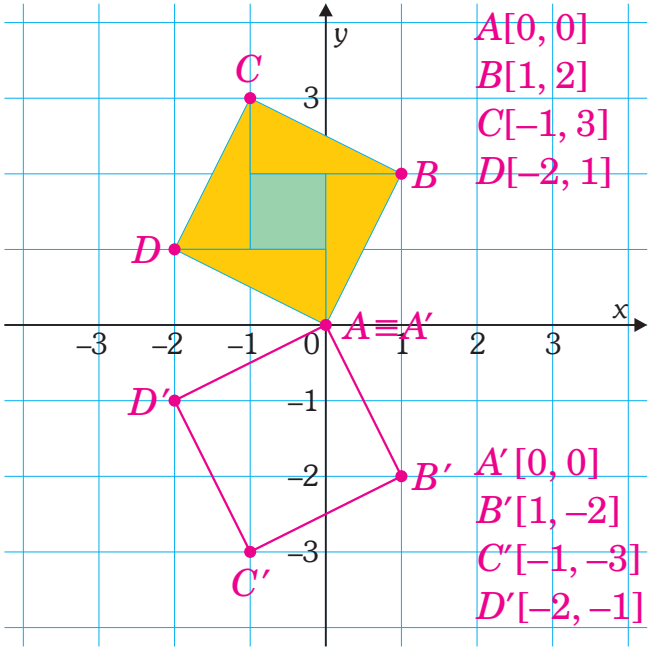


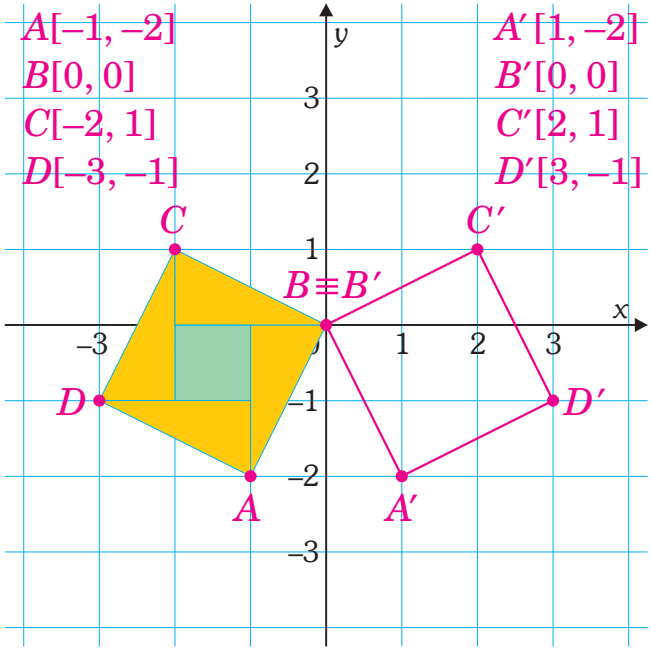
Ivka má pravdu v tom,
že zo skladačiek môže vzniknúť obdĺžnik alebo útvar v tvare „L“.
Nemá však pravdu, že sa nedá poskladať aj štvorec.
Ten vznikne tak, že skladačka v tvare štvorčeka bude v strede
a okolo neho poukladáme trojuholníky – obr. dole.

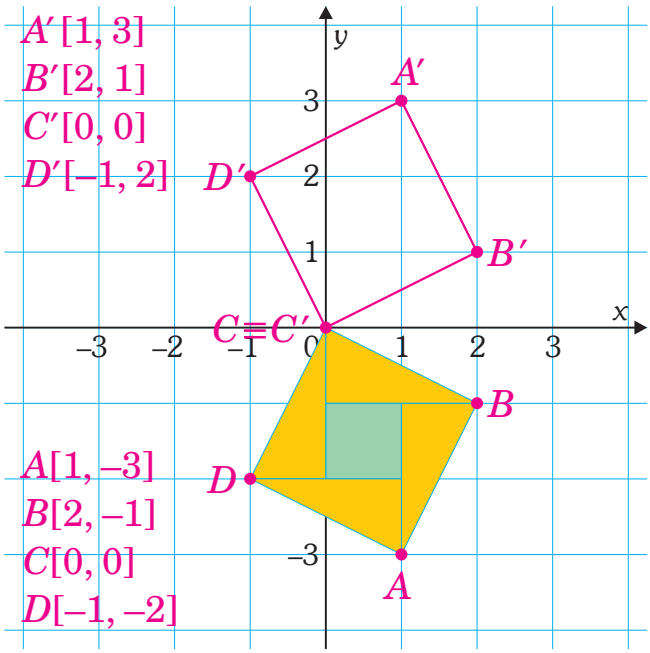
Úplnú pravdu nemá ani Mišo, keď tvrdí, že existujú len dva takéto štvorce.
Ak označíme vrcholy tohto štvorca napr. *ABCD*, tak každý z nich
vieme umiestniť do bodu [0, 0], čím vzniknú 4 rôzne riešenia.
Ku každému riešeniu ešte vieme vytvoriť ďalší štvorec,
ktorý je symetrický s pôvodným podľa jednej zo súradnicových osí.
Všetkých riešení je 8 – na vedľajšej strane.
(Symetria podľa druhej súradnicovej osi je zahrnutá v ostatných riešeniach).

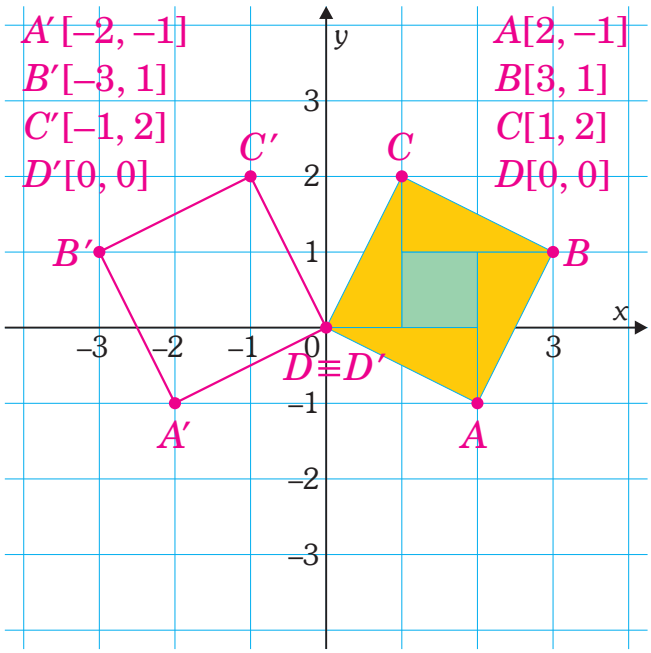
*Úlohu môžte zadať ako prácu v skupinách, aby si žiaci mohli (pod Vaším vedením) medzi sebou vymieňať riešenia a diskutovať, či ešte existujú iné riešenia, príp. prečo už nie. Na uľahčenie odporúčame skladačky vytlačiť, vystrihnúť a žiaci môžu poskladať štvorec (a následne aj jeho symetrické obrazy).*

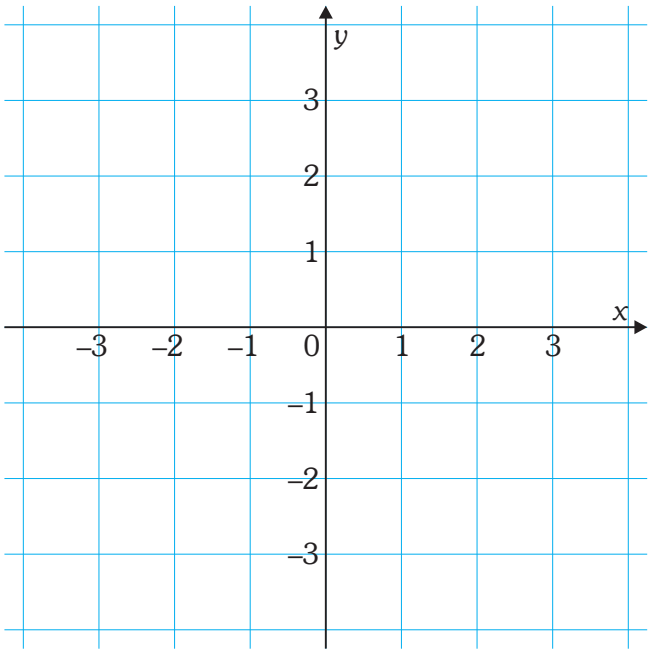


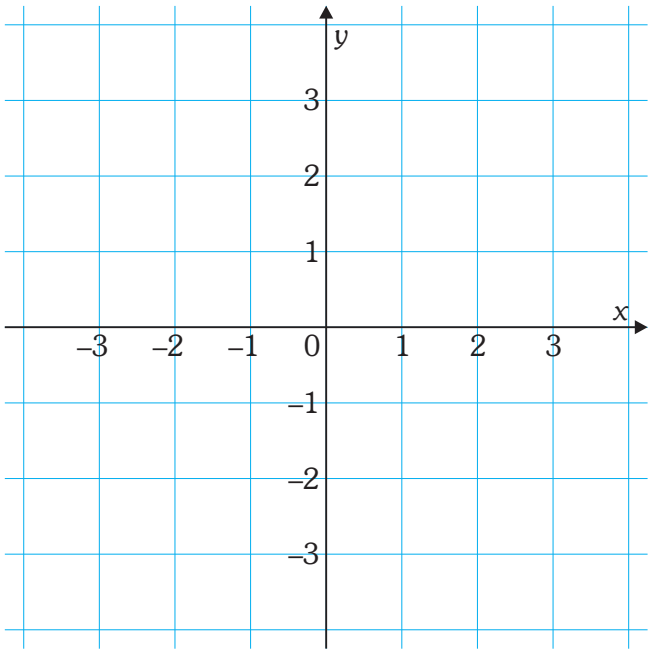

A[0, 0]
B[1, 2]
C[–1, 3]
D[–2, 1]
A′[0, 0]
B′[1, –2]
C′[–1, –3]
D′[–2, –1]
A≡A′
B
C
D
B′
C′
D′
x
y


A[–1, –2]
B[0, 0]
C[–2, 1]
D[–3, –1]
A′[1, –2]
B′[0, 0]
C′[2, 1]
D′[3, –1]
B≡B′
A
B
C
D
A′
B′
C′
D′
x
y


A′[1, 3]
B′[2, 1]
C′[0, 0]
D′[–1, 2]
A[1, –3]
B[2, –1]
C[0, 0]
D[–1, –2]
C≡C′
A′
B′
D′
A
B
D
x
y

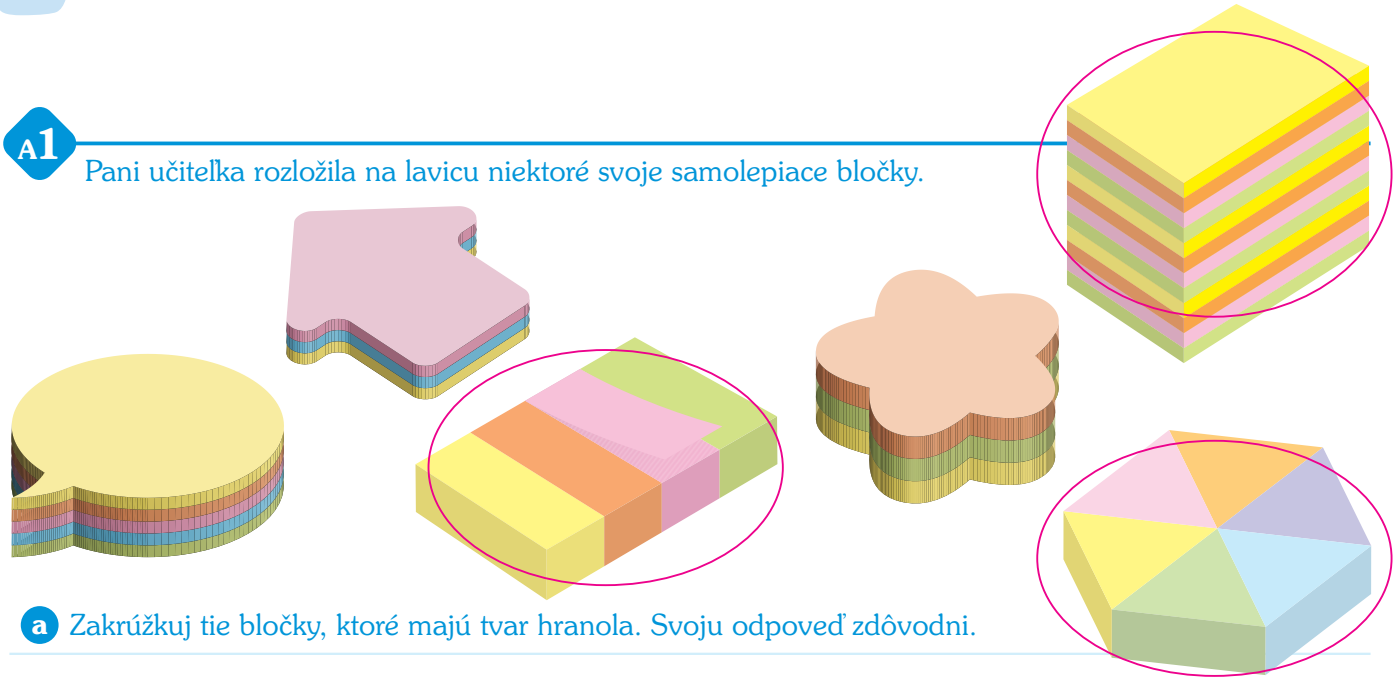

A′[–2, –1]
B′[–3, 1]
C′[–1, 2]
D′[0, 0]
A[2, –1]
B[3, 1]
C[1, 2]
D[0, 0]
D≡D′
C′
C
B′
B
A′
A
x
y





# 7 Hranoly

**A1** Pani učiteľka rozložila na lavicu niektoré svoje samolepiace bločky.



**a** Zakrúžkuj tie bločky, ktoré majú tvar hranola. Svoju odpoveď zdôvodni.

Hranol má podstavy v tvare $n$-uholníka.
Iba 3 bločky majú podstavy v tvare $n$-uholníka.
Podstavy zvyšných bločky sú zaoblené, takže nejde o $n$-uholníky
a preto tieto bločky nie sú hranoly.

**b** Bolo by možné niektoré z bločkov „prerobiť“ na hranoly bez toho, aby „výrazne“ zmenili svoj tvar?

Najjednoduchšie by sa na hranol dal prerobiť
bloček v tvare šípky, ak by jej okraje neboli zaoblené
a šípka (podstava) by tak mala tvar 7-uholníka.

**c** Pani učiteľka nalepila na lavicu z ďalších bločkov iba jednotlivé papieriky.
Urč, koľko stien má hranol s takou podstavou.

Počet stien: 8 (= 2 + 6) Počet stien: 7 (= 2 + 5) Počet stien: 14 (= 2 + 12)

Každý hranol má dve postavy, pričom počet strán podstavy
určuje počet zvyšných stien hranola.

## A2

Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé alebo nepravdivé. Zdôvodni, prečo si to myslíš.

**a** Všetky hranoly sú pravidelné. **pravda – nepravda**

Lebo podstava môže byť napr. lichobežník a taký hranol nie je pravidelný.

**b** Niektoré hranoly sú kvádre. **pravda – nepravda**

Lebo ak je podstava obdĺžnik, hranol je kváder.

**c** Každý pravidelný hranol má aspoň jednu dvojicu navzájom rovnobežných bočných stien. **pravda – nepravda**

Lebo napr. ak je podstava pravidelný 5-uholník, neexistujú dve bočné steny hranola, ktoré sú navzájom rovnobežné.

**d** Ak je hranol kolmý, tak aj uhlopriečky v jeho podstavách sú na seba kolmé. **pravda – nepravda**

Lebo napr. kváder je kolmý hranol s obdĺžnikovou podstavou a uhlopriečky v obdĺžniku nie sú na seba kolmé.

**e** Všetky hranoly majú párny počet stien. **pravda – nepravda**

Lebo napr. 3-boký hranol má 5 stien.

**f** Najmenší možný počet stien hranola je 5. **pravda – nepravda**

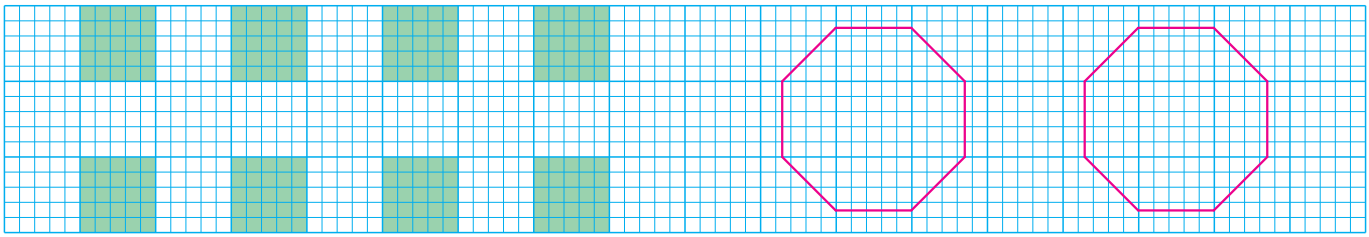
Lebo každý hranol má 2 steny tvoriace podstavy a toľko bočných stien, koľko má jeho podstava strán (najmenej 3).

**g** Niektoré hranoly majú bočné steny v tvare trojuholníka. **pravda – nepravda**

Lebo v takom prípade by strany podstáv nemohli byť spojené bočnými stenami.

## A3

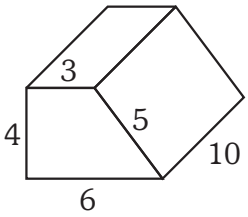
Útvary na obrázku sú podstavy a bočné steny hranola.
Dá sa z nich poskladať hranol bez toho, aby nejaký útvar zvýšil?



Ak nie, najmenej koľko útvarov treba pridať, aby sa dala sieť poskladať? Aký musia mať útvary tvar?

Nedá sa. Hranol, ktorý má všetky steny štvorce, je kocka.
Kocka má však iba 6 stien, takže 2 steny zvýšia.
Štvorce na obrázku môžeme považovať za bočné steny hranola.
Je ich 8, takže treba pridať ešte dve rovnaké podstavy –
pravidelné 8-uholníky so stranou rovnako dlhou, ako je strana štvorca.

**A4** Adam, Betka a Cyril mali za úlohu vypočítať objem telesa, ktoré je na obrázku. Vymysleli nasledujúce riešenia.



**a** Má niekto z nich pravdu? Vysvetli svoje rozhodnutie.

Adamov výpočet nie je správny.
Adam má pravdu v tom, že objem hranola vypočítame ako súčin obsahu podstavy a jeho výšky. Pri tomto hranole však vzťah používa nesprávne – ak by bola spodná podstava hranola obdĺžnik so stranami 6 a 10, aj vrchná stena by musela byť rovnaká (podstavy musia byť zhodné). „Vrchná podstava“ telesa na obrázku je však obdĺžnik s rozmermi 3 a 10.
Cyril nemá pravdu, lebo ak za výšku považujeme napr. 10, potom súčin 4 · 6 · 5 · 3 by musel byť obsah podstavy. A tento vzťah nevyjadruje obsah daného lichobežníka.
Betkin postup je správny, lebo predná a zadná stena sú zhodné a tvoria podstavy telesa. Ide teda o kolmý hranol s podstavou pravouhlého lichobežníka.

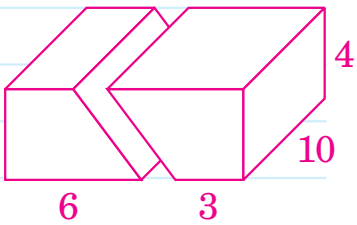
**b** Vysvetli, ako objem vypočítaš ty.

Podľa Betkinho postupu stačí použiť vzťah na obsah lichobežníka vynásobený výškou telesa.

$$V = S \cdot v \rightarrow V = \frac{(a+c)\cdot v_1}{2}\cdot v \rightarrow V = \frac{(6+3)\cdot 4}{2}\cdot 10 \rightarrow V = 180$$

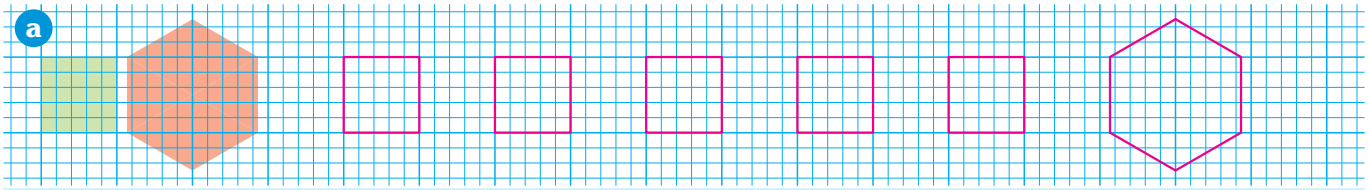
**c** Pani učiteľka žiakom poradila, aby si predstavili dve takéto telesá a skúsili z nich zložiť jedno, jednoduchšie teleso. Vraj im to vo výpočte pomôže. Čo tým myslela? Vysvetli jej nápad.

Ak by sme mali dve takéto telesá a druhé by sme otočili o 180°, tak ich priložením by vznikol kváder s rozmermi 9, 4 a 10. Jeho objem by bol $V = 9 \cdot 4 \cdot 10 = 360$. Keďže by vznikol zložením dvoch rovnakých telies, polovica z jeho objemu by bola hľadaným objemom.



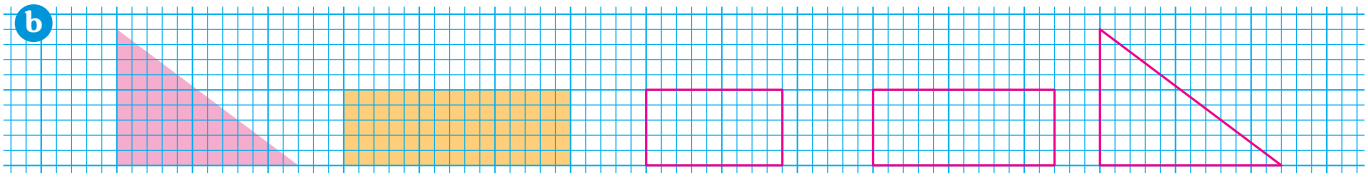
**A5** Dokresli všetky zvyšné steny tak, aby sa z nich dala vyskladať sieť hranola.

**a**



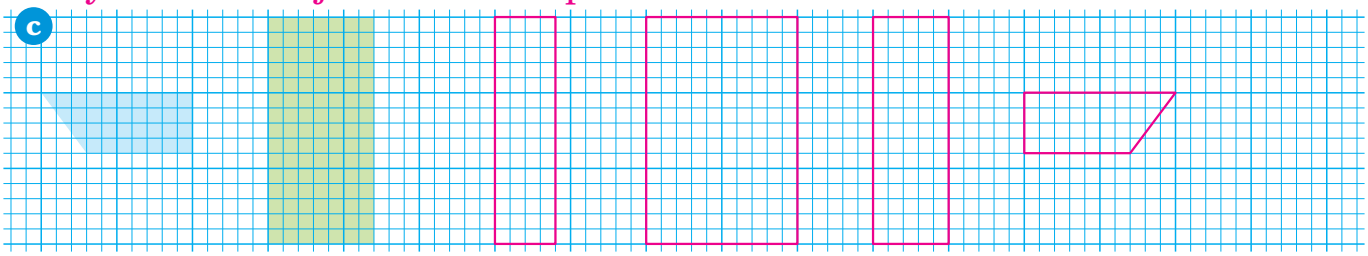
Podstava hranola je pravidelný 6-uholník,
preto bočných stien musí byť šesť.
Dokreslíme 5 štvorcov a ešte jednu podstavu.

**b**



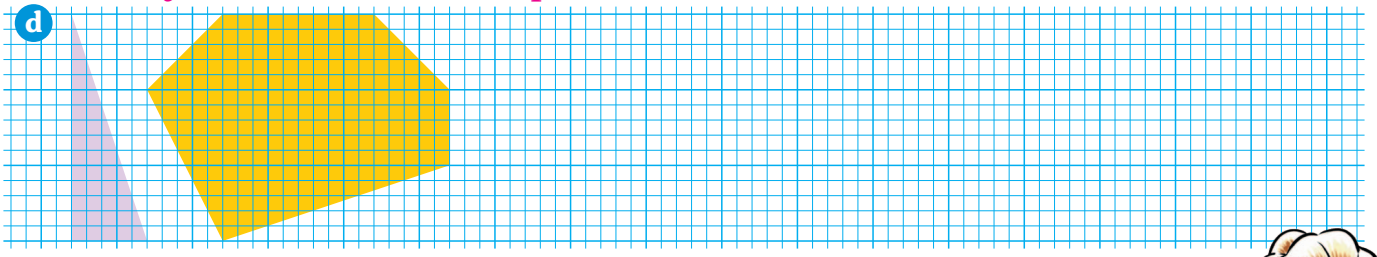
Podstava hranola je pravouhlý trojuholník, preto bočné steny budú tri a oranžový obdĺžnik je jednou z nich (prislúchajúci k najdlhšej strane trojuholníka).
Dokreslíme dva obdĺžniky a ešte jednu podstavu.
Výška hranola je 5 – to vieme podľa rozmerov oranžového obdĺžnika.

**c**



Podstava je pravouhlý lichobežník, preto bočné steny budú 4.
Výška hranola je 15, čo vieme podľa výšky zeleného obdĺžnika,
lebo ani jedna strana podstavy nemá dĺžku 15, takže obdĺžnik
musí byť spojený s podstavou pri strane dĺžky 7.
Chýbajú teda tri bočné steny tvaru obdĺžnika s výškou 15
a ešte jedna lichobežníková podstava.

**d**



Tieto útvary nie je možné doplniť na sieť hranola.
Bočné steny hranola musia mať tvar štvorca alebo obdĺžnika,
takže útvary na obrázku môžu byť iba jeho podstavy.
Hranol však nemôže mať podstavy rôzneho tvaru.

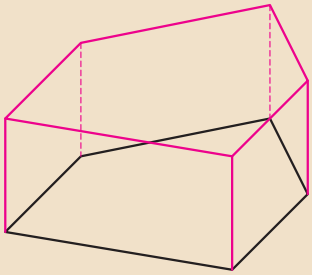
## A6

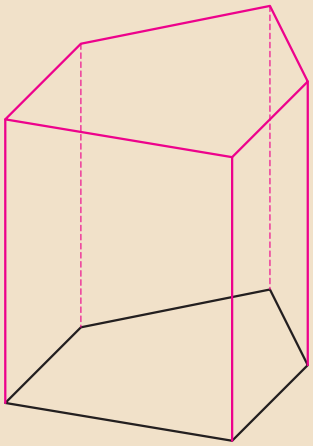
Matej si niektoré telesá nevie dobre predstaviť, preto mu s tým Janka pomáha.
Spolu si dopisovali cez počítač. Doplň ich komunikáciu a dokresli potrebné obrázky.

**a**

Vedela by si nakresliť dva hranoly s rovnakými podstavami, ale rozdielnymi plášťami?

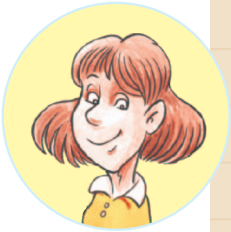
Jasné! Hranoly budú mať rovnaké podstavy, ale rôzne výšky, preto ich plášte nebudú rovnaké.



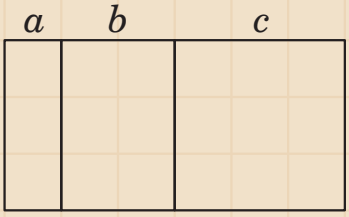


**b**

Vedela by si nakresliť aj dva hranoly s rovnakými plášťami, ale rozdielnymi podstavami?



Predstav si, že plášť hranola by vyzeral takto...



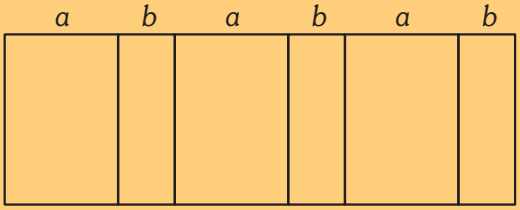

Potom podstava by bol trojuholník so stranami *a, b, c* a ten je len jeden. Podstavy hranola sú vždy rovnaké. Ak sú rovnaké plášte, budú rovnaké aj hranoly.

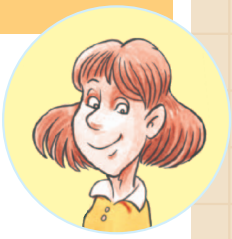
Ale keby som nakreslil rovnaký obdĺžnik a jeho dlhšiu stranu by som rozdelil na 3 rozličné úseky, bol by to rovnaký plášť, ale podstavy by boli iné trojuholníky.

Áno, ale iba ak by si sa na plášť pozeral ako na jeden útvar, na ktorom nie sú znázornené jednotlivé bočné steny hranola.

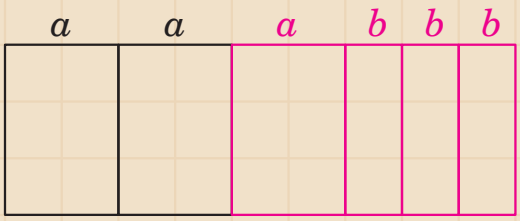
**c**

Keby mal hranol takýto obdĺžnikový plášť, mohol by vzniknúť iný hranol, ale s rovnakými stenami?





Zaujímavá otázka! Ak chceme iný hranol, ale rovnaký tvar bočných stien, tak musíme zmeniť ich poradie. Zmeníme tak aj tvar podstavy. Čiže všetky steny hranola už nebudú rovnaké. Nakreslím ti to a ty to dokonči.



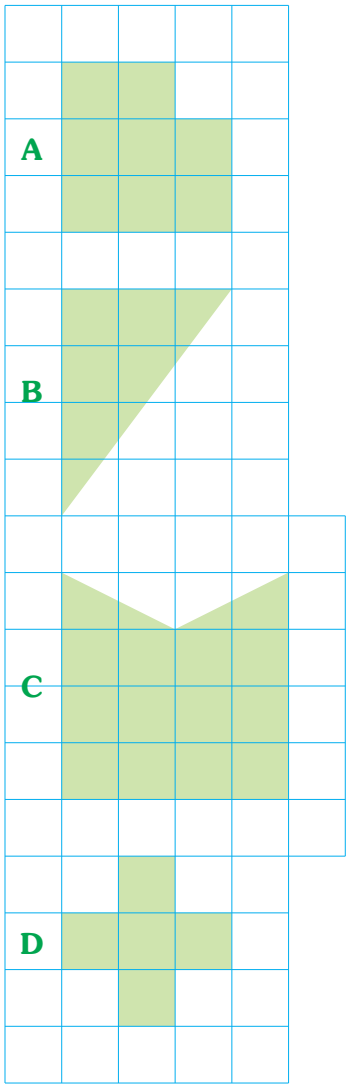
## A7

Na obrázku sú podstavy hranolov A, B, C, D.
Žiaci mali určiť, ktorý z nich je najvyšší, ak je objem všetkých štyroch rovnaký.

**Hana:** „Podstava hranola **A** má obsah 8 štvorčekov, podstava **B** má polovicu z 3 · 4, teda 6, podstava **C** má 4 · 4 – 2 štvorčeky, teda 14, a podstava **D** má obsah 5 štvorčekov.
Všetky hranoly majú mať rovnaký objem.
Keby to bolo 100 cm³, pre hranol **A** by platilo $100 = 8 \cdot v$, čiže by mal výšku $v_A = 12{,}5$ cm.
Výšky ostatných hranolov:
$v_B = 100 : 6 \doteq 16{,}67$ cm
$v_C = 100 : 14 \doteq 7{,}14$ cm
$v_D = 100 : 5 = 20$ cm
Najvyšší by bol hranol **D**.

**Igor:** „A čo keby ich objem nebol 100 cm³?
Hana nemôže takto počítať! To sa vlastne ani nedá určiť, keď nepoznáme objem hranolov!“

**Ema:** „Objem ľubovoľného hranola je $V = S_p \cdot v$.
Obsahy podstáv poznám: 8, 6, 14 a 5 štvorčekov.
Objem hranolov je rovnaký, označím ho $V$.
Potom pre výšky hranolov platí:
$v_A = V : 8$ $v_B = V : 6$ $v_C = V : 14$ $v_D = V : 5$
Ak chcem dostať najväčšiu výšku, musím objem V vydeliť najmenším číslom.
(To je ako keď delím ten istý počet cukríkov medzi 5, 6, 8 alebo 14 detí.
Čím menej detí bude, tým viac cukríkov každé dieťa dostane.)
Najvyššiu výšku má hranol **D**, lebo má najmenšiu podstavu.“




**a** Čie riešenie by sme podľa teba mali uznať ako správne? Zdôvodni to.

*Cieľom tejto úlohy je, aby žiaci porozumeli riešeniu a argumentácii iných žiakov a uvedomili si, že úloha sa dá riešiť, aj keď nemajú všetky údaje zadané.*
*Hana i Ema vyriešili úlohu správne.*

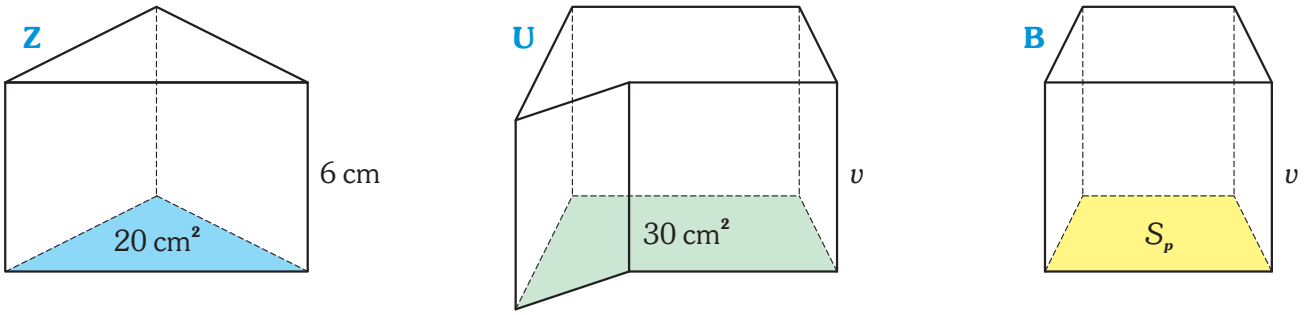
**b** Komu by podľa teba pani učiteľka dala najviac bodov za riešenie úlohy a prečo?

*Cieľom tejto úlohy je posúdiť „kvalitu“ riešenia.*
*Kým Hana úlohu vyriešila pre konkrétnu situáciu,*
*Emino riešenie je všeobecnejšie a zaslúži si plný počet bodov.*
*Aby Hana získala plný počet bodov, musela by ešte pridať zdôvodnenie, prečo si mohla zvoliť konkrétny objem 100 cm³. Napr. mohla by zvoliť ešte iný objem 200 cm³ alebo 1 000 cm³ a ukázať, že stále má najvyššiu výšku hranol D, lebo jeho podstava je najmenšia.*

*Žiaci môžu diskutovať aj o použitých jednotkách: Ako vieme, že strana štvorčeka je 1 cm?*
*Tu môže vzniknúť ďalšia zaujímavá diskusia o tom, že v tomto prípade na jednotkách nezáleží.*

## A8

Doplň chýbajúce údaje, ak vieš, že hranoly Z, U, B majú rovnaký objem a že obsah podstavy hranola B je deliteľný 5 a zároveň je menší ako 50 cm².
Všetky hľadané údaje sú celočíselné.




Objem hranola Z je 120 cm³, lebo $V = S_p \cdot v = 20 \cdot 6 = 120$ cm³.

Objem hranola U je 120 cm³.

Obsah podstavy hranola U je 30 cm³.

Výška hranola U je 4 cm, lebo $30 \cdot 4 = 120$.

Objem hranola B je 120 cm³.

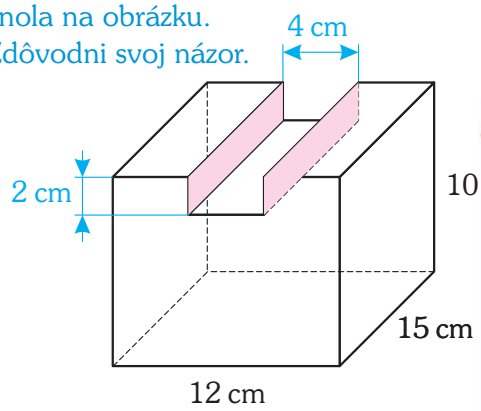
Obsah podstavy hranola U

môže byť 5 cm², 10 cm², 15 cm², 20 cm², 30 cm², 40 cm³, lebo obsah podstavy musí byť deliteľom objemu, teda čísla 120, zároveň musí byť deliteľný číslom 5 a menší ako 50. Týmto podmienkam vyhovujú iba čísla 5, 10, 15, 20, 30 a 40.

| $S_p$ | 5 cm² | 10 cm² | 15 cm² | 20 cm² | 30 cm² | 40 cm² |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 24 cm | 12 cm | 8 cm | 6 cm | 4 cm | 3 cm |

## A9

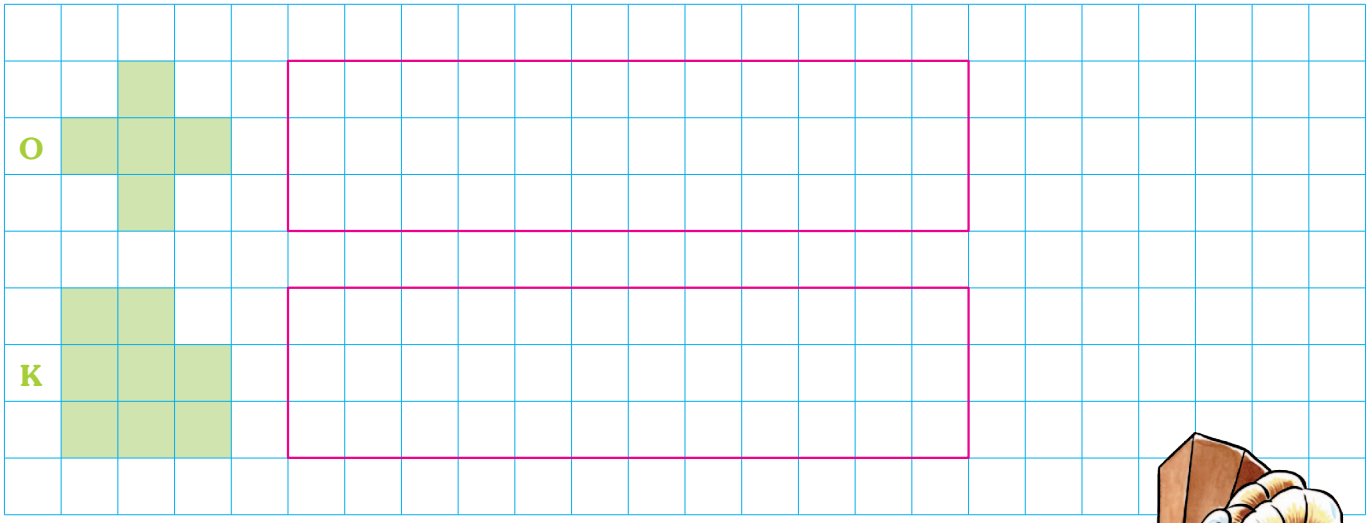
Lukáš mal určiť povrch hranola na obrázku.
Je jeho riešenie správne? Zdôvodni svoj názor.



Lukášovo riešenie by bolo správne, keby počítal objem.
Pri povrchu sa vyrezaním malého kvádra zmenší len obsah postáv vzniknutého hranola, no jeho povrch sa celkovo zväčší, lebo do povrchu sa zarátajú dve nové steny hranola (viď obrázok).

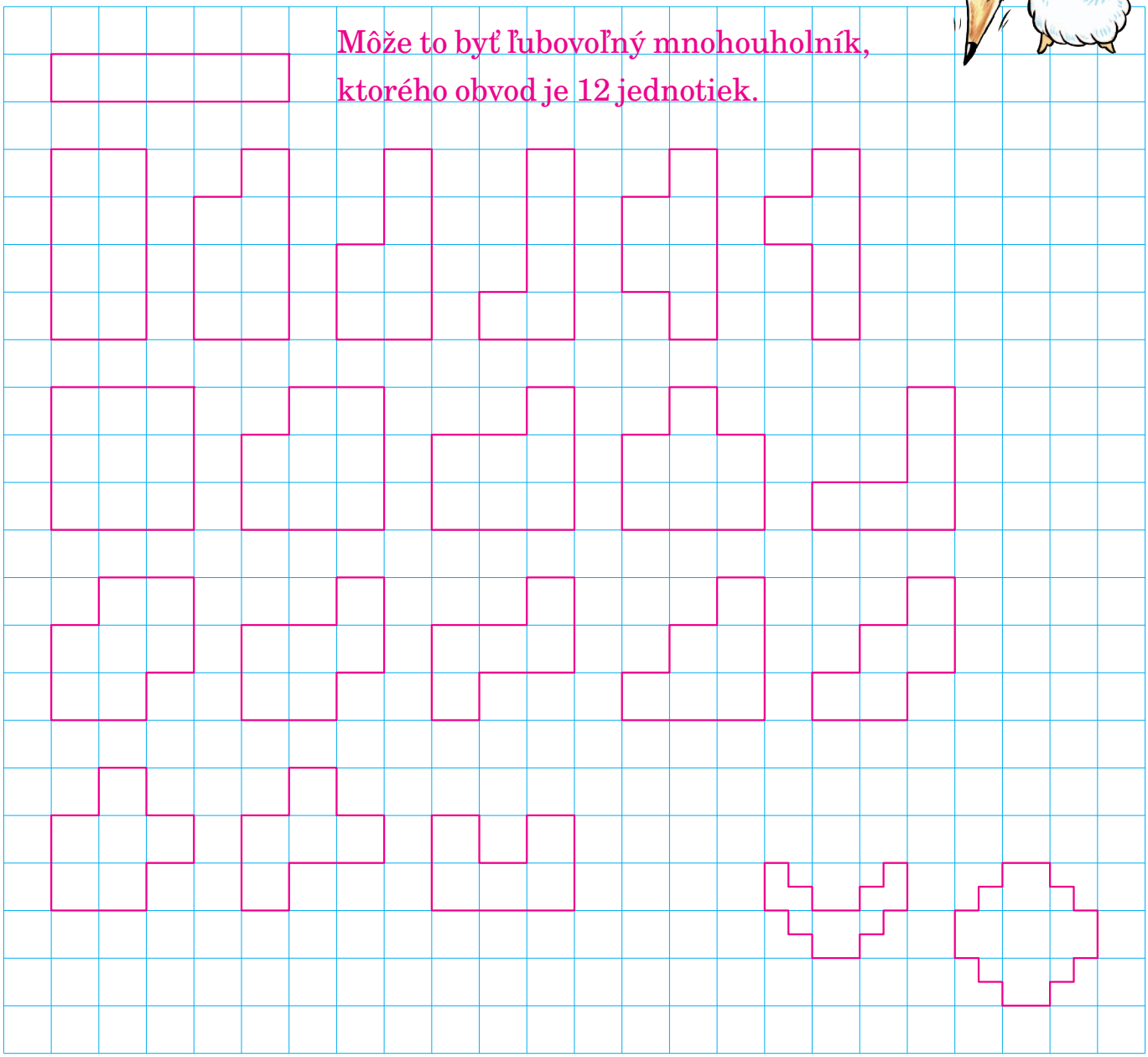
*Žiakom môžete zadať extra úlohu, v ktorej majú určiť povrch hranola na obrázku (944 cm²).*

**A10** Sú dané hranoly O a K, ktorých podstavy sú na obrázku. Výška oboch hranolov sú 3 jednotky.



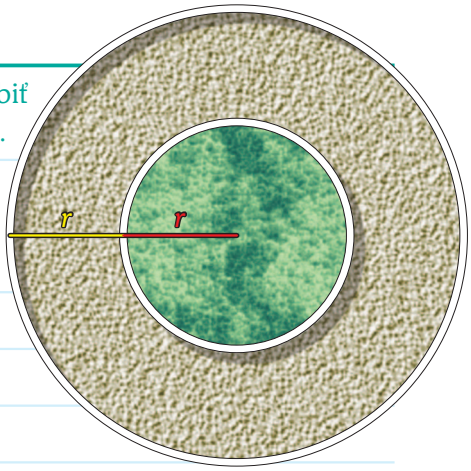
**a** Načrtni celkový útvar, ktorý vznikne rozvinutím ich plášťov do štvorčekovej siete.

**b** Nakresli ďalšie možné podstavy hranola L tak, aby mal jeho rozvinutý plášť rovnaký celkový tvar ako rozvinutý plášť hranola O.



# 8 Kružnica a kruh

**A1** Hanka má v záhrade kruhový záhon s kvetmi. Okolo záhona chce urobiť chodník z kamienkov, ktorý bude z oboch strán ohradený obrubníkom.




**a** Keďže šírka chodníka je rovnaká ako polomer záhonu, vonkajší obrubník Hanka odrezala 2-krát dlhší ako vnútorný. Bude jej táto dĺžka stačiť? Zdôvodni svoj názor.

Vnútorný a vonkajší obrubník tvoria sústredné kružnice, pričom väčšia kružnica má dvojnásobný polomer. Hanka preto predpokladá, že aj obvod väčšej kružnice (čiže dĺžka vonkajšieho obrubníka) bude dvojnásobný. Má pravdu.

$o_{vnútorný\ obrubník} = 2\pi r$

$o_{vonkajší\ obrubník} = 2\pi \cdot 2r = 4\pi r$

**b** Hanka chce vypočítať plochu chodníka, aby kúpila dostatočné množstvo kamienkov na jeho vysypanie. Je táto plocha dvojnásobkom plochy kvetinového záhona, alebo sú obe plochy rovnaké?

Plochu chodníka vypočítame ako obsah medzikružia, kde väčší kruh má dvojnásobný polomer ako menší kruh.

$S_{záhona} = \pi \cdot r \cdot r$

$S_{chodníka} = \pi \cdot 2 \cdot r \cdot 2 \cdot r - \pi \cdot r \cdot r$

$S_{chodníka} = 4 \cdot \pi \cdot r \cdot r - \pi \cdot r \cdot r$

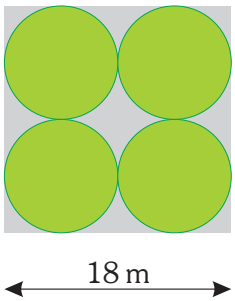
$S_{chodníka} = \pi(4 \cdot r \cdot r - 1 \cdot r \cdot r)$

$S_{chodníka} = \pi \cdot 3 \cdot r \cdot r$

$S_{chodníka} = 3 \cdot \pi \cdot r \cdot r$

Plocha chodníka nie je dvojnásobná a ani rovnaká ako plocha záhona.

**A2** Na malej farme plánujú na štvorcovom pozemku chovať sliepky vo voľnom výbehu. Na obrázku je pôdorys pozemku so štyrmi rovnako veľkými kruhovými výbehmi. Podľa smernice chov vo voľnom výbehu spĺňa parametre vtedy, keď na každú sliepku pripadajú aspoň 4 m² výbehu. Môžu majitelia farmy chovať v týchto výbehoch spolu 60 sliepok? Svoju odpoveď zdôvodni.



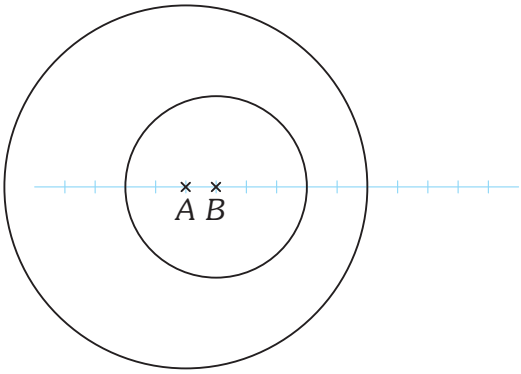

Priemer jedného kruhu je 9 m, polomer teda 4,5 m.

Obsah jedného výbehu: $S = \pi \cdot r \cdot r = 3{,}14 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 = 63{,}585\ m^2$

Ak jedna sliepka potrebuje minimálne 4 m² plochy, potom v jednom výbehu môže byť najviac $63{,}585 : 4 \doteq 15$ sliepok. V štyroch výbehoch ich môže byť $15 \cdot 4 = 60$. Áno, majitelia môžu chovať spolu 60 sliepok, maximálne 15 sliepok v každom výbehu.

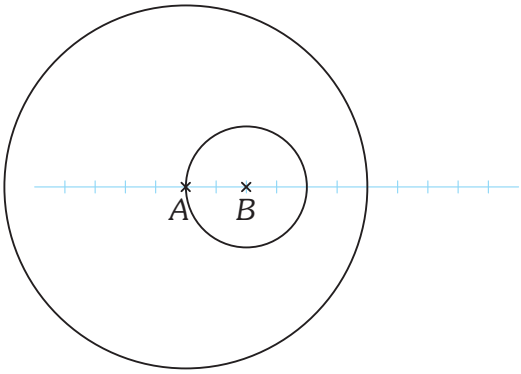
**A3** Na obrázku sú dve kružnice. Väčšia z nich, kružnica so stredom v bode *A*, má polomer 6 cm. O polomere menšej kružnice so stredom v bode *B* vieme iba to, že je vyjadrený celým číslom.

**a** Aký polomer môže mať kružnica so stredom v bode *B* v nasledujúcich situáciách? Nájdi všetky možnosti.




- Bod *B* je vzdialený 1 cm od bodu *A*.
- Kružnice nemajú žiaden spoločný bod.

Polomer menšej kružnice musí byť max. 4 cm – ak vzdialenosť bodov *A* a *B* je 1 cm, tak pri polomere 5 cm by mali kružnice vnútorný dotyk. Menšia kružnica má celočíselný polomer, preto všetky možnosti sú 4 cm, 3 cm, 2 cm a 1 cm.

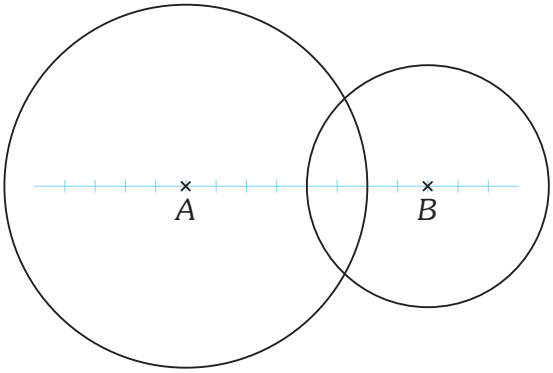



- Menšia kružnica sa nachádza vo vnútri väčšej kružnice.
- Kružnice nemajú žiaden spoločný bod.
- Menšia kružnica prechádza cez stred *A*.

Priemer menšej kružnice musí byť menší ako polomer väčšej kružnice, čo je 6 cm, a zároveň polomer musí byť celé číslo. Preto polomer menšej kružnice môže byť 2 cm alebo 1 cm.

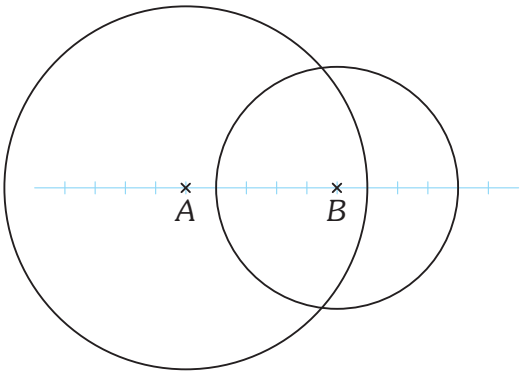
**b** Aká môže byť celočíselná vzdialenosť bodov *A* a *B* v nasledujúcich situáciách? Nájdi všetky možnosti.

- Polomer kružnice so stredom v bode *B* je 4 cm.
- Kružnice majú dva spoločné body.
- Bod *B* leží mimo väčšej kružnice.




Najväčšia vzdialenosť, pri ktorej majú 2 spoločné body je 9 cm (pri 10 cm, čo je súčet polomerov, nastane vonkajší dotyk a to je len 1 spoločný bod). Najmenšia vzdialenosť je 7 cm (pri 6 cm by bod *B* ležal na väčšej kružnici). Vzdialenosť stredov *A* a *B* môže teda byť 7 cm, 8 cm alebo 9 cm.

- Polomer kružnice so stredom v bode *B* je 4 cm.
- Kružnice majú dva spoločné body.
- Bod *B* leží vo vnútri väčšej kružnice.

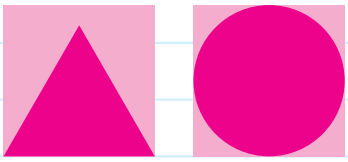



Najväčšia vzdialenosť bodov je 5 cm, lebo pri 6 cm by bod *B* ležal na väčšej kružnici. Najmenšia vzdialenosť je 3 cm, lebo pri 2 cm by mali kružnice vnútorný dotyk (čiže 1 spoločný bod). Vzdialenosť stredov *A* a *B* môže teda byť 3 cm, 4 cm alebo 5 cm.

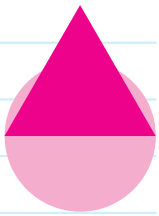
## A4

Z farebného papiera sme vystrihli tri útvary – kruh s priemerom 4 cm, štvorec so stranou 4 cm, a rovnostranný trojuholník so stranou 4 cm. Chceme položiť na seba dva z nich tak, aby vrchný útvar zakryl celý spodný útvar.
Dá sa nájsť taká dvojica? Zdôvodni svoju odpoveď.

Dá sa to vždy, keď dáme na vrch štvorec.
Štvorec prekryje trojuholník,
lebo výška trojuholníka je menšia ako 4 cm.
Štvorec prekryje aj kruh,
lebo kruh sa bude dotýkať jeho strán.



Kruh neprekryje trojuholník (ani naopak).
Ak by kruh mal prekryť trojuholník, strana trojuholníka
by musela ležať na niektorom priemere kruhu a výška trojuholníka
by potom mohla byť len 2 cm, aby spod kruhu nevyčnieval.

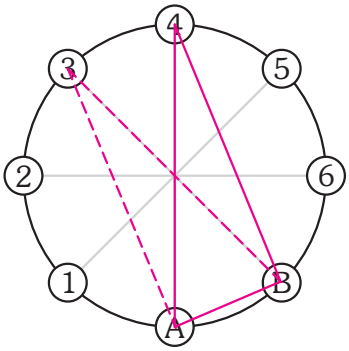


## A5

Na školskom dvore vybudovali pre deti nové ihrisko. Pribudol tam aj šliapací kolotoč, na ktorom sa môže viezť súčasne 8 detí. Adam, Baja a Gabika si popri vození na kolotoči chceli precvičiť nové učivo o pravouhlých trojuholníkoch. A tak si na sedadlá kolotoča sadali tak, aby sedeli vždy na vrcholoch pravouhlého trojuholníka. Miesta, kde sedí Adam a Baja sú označené písmenami *A* a *B*.

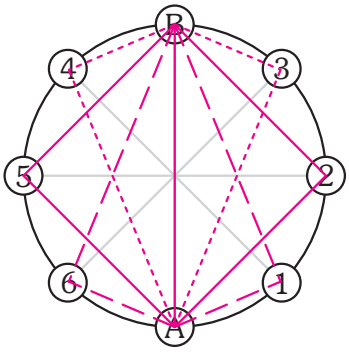
**a** Vieš, ktoré učivo si na kolotoči deti precvičovali? Tálesovu kružnicu.

**b** Na ktoré sedadlo si teda môže Gabika sadnúť? Zdôvodni svoju odpoveď.



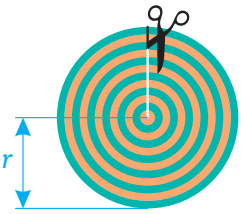

Keďže Adam a Baja sedia vedľa seba, Gabika musí sedieť oproti niekomu z nich, aby sme dostali priemer kružnice. Ten na kolotoči môžeme vytvoriť dvoma spôsobmi: buď si Gabika sadne na miesto 3 (oproti Baji) alebo na miesto 4 (oproti Adamovi).

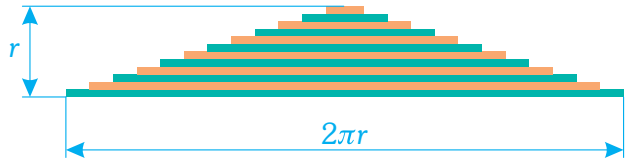
*Kolotoč je kružnica, sedadlá sú body na nej a ich pravidelné rozmiestnenie predstavuje jej jednotlivé priemery A4, B3, 62, 51.*




Keďže Adam a Baja sedia oproti sebe – vytvárajú priemer kružnice, Gabika si môže sadnúť na ľubovoľné miesto a vždy tak vytvorí vrchol trojuholníka, pri ktorom bude pravý uhol.

**A6** Hanka našla na internete iné odvodenie vzorca na výpočet obsahu kruhu než to, ktoré sa učili v škole. Snažila sa pochopiť, čo obrázok ukazuje a ako sa k vzorcu $S = \pi \cdot r \cdot r$ dopracovať. Preskúmaj obrázok, opíš, čo sa s kruhom deje, a vysvetli, ako možno k vzorcu dospieť.




Kruh smerom zvonku do stredu rozdelili na viacero pásikov rovnakej šírky a rozstrihli ich. Pásiky rozprestreli a naukladali jeden na druhý. Vzniknutý tvar je (takmer) trojuholník, ktorého obsah je $S = \frac{\text{strana} \cdot \text{výška}}{2} = \pi \cdot r \cdot r$, čo je obsah kruhu.

**A7** Viktor, Mišo a Maťo si chcú objednať pizzu z pizzérie *Repríza*.

**a** Kto má pravdu a prečo?

Musíme porovnať obsahy pízz: $S_S = 3{,}14 \cdot 12 \cdot 12 = 452{,}16\ \text{cm}^2$

$S_M = 3{,}14 \cdot 14 \cdot 14 = 615{,}44\ \text{cm}^2$

$S_{XXL} = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 25 = 1\,962{,}5\ \text{cm}^2$

Tri pizze M ..... $3 \cdot 615{,}44 = 1\,846{,}32\ \text{cm}^2 < S_{XXL}$ .... Maťo má pravdu.

Dve pizze S ..... $2 \cdot 452{,}16 = 904{,}32\ \text{cm}^2 < S_{XXL}$ ..... Mišo nemá pravdu.

Keďže Maťo má pravdu, Viktor, ktorý tvrdil, že ani jeden z nich nemá pravdu, pravdu nemá.

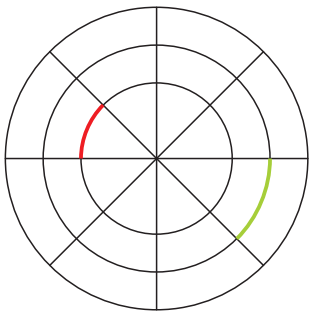
**b** Predavač im povedal: *„Ak máte radi okraj pizze, dajte si každý malú pizzu S. Budete mať okrajov viac ako na jednej XXL pizzi“.*
Má predavač pravdu? Zdôvodni svoju odpoveď.

Musíme porovnať obvody pízz: $o_S = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 = 6{,}28 \cdot 12 = 75{,}36\ \text{cm}$

$o_{XXL} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 6{,}28 \cdot 25 = 157\ \text{cm}$

Tri pizze S ..... $3 \cdot 75{,}36 = 226{,}08\ \text{cm} > o_{XXL}$ ..... Predavač má pravdu.

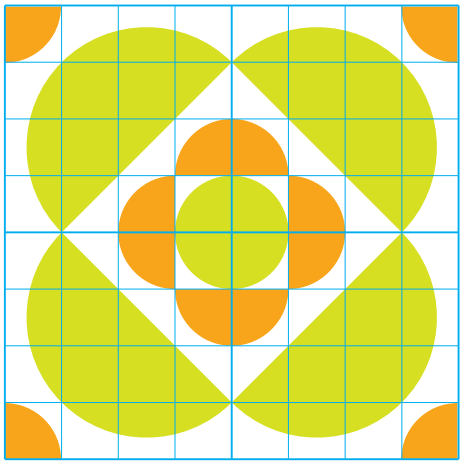
**A8** Každá z troch sústredných kružníc je rozdelená na 6 rovnakých častí. Porovnaj dĺžky červeného a zeleného oblúka bez akéhokoľvek výpočtu a merania. Zdôvodni svoj výsledok.



Dĺžka kružnicového oblúka závisí od polomeru kružnice a od veľkosti stredového uhla – ten je pri oboch oblúkoch rovnaký. Keďže červený oblúk leží na menšej kružnici, tak jeho dĺžka bude menšia ako dĺžka zeleného oblúka.

## A9

Pani učiteľka prekreslila žiakom geometrický vzor zo svojej návliečky na vankúš. Ich úlohou bolo určiť, či prevažuje zelená alebo oranžová plocha. Posúď pravdivosť žiackych tvrdení.



**Tamara:** „Oranžové štvrťkruhy v rohoch vytvoria jeden kruh, oranžové polkruhy vytvoria spolu dva kruhy. To sú spolu tri kruhy. Zelené polkruhy vytvoria spolu dva kruhy a s prostredným zeleným sú to tiež tri kruhy. Zelené a oranžové plochy sú rovnaké.“

**Oliver:** „Kdeže… Zelenej plochy je určite viac, to vidím.“

**Robo:** „Keď nie sú v obrázku napísané presné veľkosti polomerov alebo priemerov, tak nevieme tvrdiť nič.“

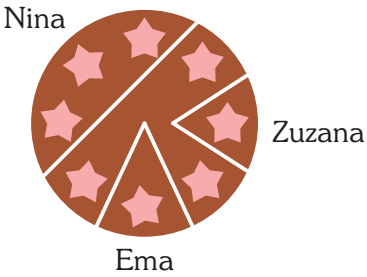
Tamara nemá pravdu, lebo pospájaním útvarov síce vzniknú tri zelené aj tri oranžové kruhy, ale ich polomery nie sú rovnaké, preto ani ich plochy nie sú rovnaké.

Oliver sa nemôže rozhodovať na základe toho, čo sa mu zdá – môže ísť o optický klam.

Robo nemá pravdu, pretože odpoveď vieme dostať napríklad úvahou: Každý oranžový polkruh je menší ako zelený polkruh. Spojením oranžových štvrťkruhov dostaneme kruh rovnako veľký ako zelený kruh v strede. Zelenej farby je teda na obliečke viac.

## A10

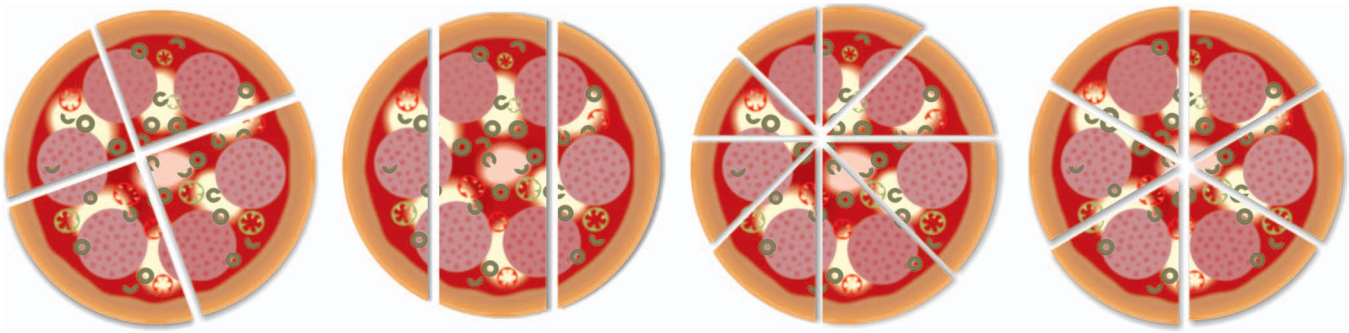
Sestry Nina, Ema a Zuzana sú veľké maškrtnice. Nevydržali, kým im mama rozkrája tortu, a každá z nich si kúsok odkrojila sama. Má niektorý z týchto kúskov tvar kruhového výseku?




Kruhový výsek má vrchol v strede kruhu. Jediný kúsok, ktorý by mohol byť kruhovým výsekom, je ten Emin.

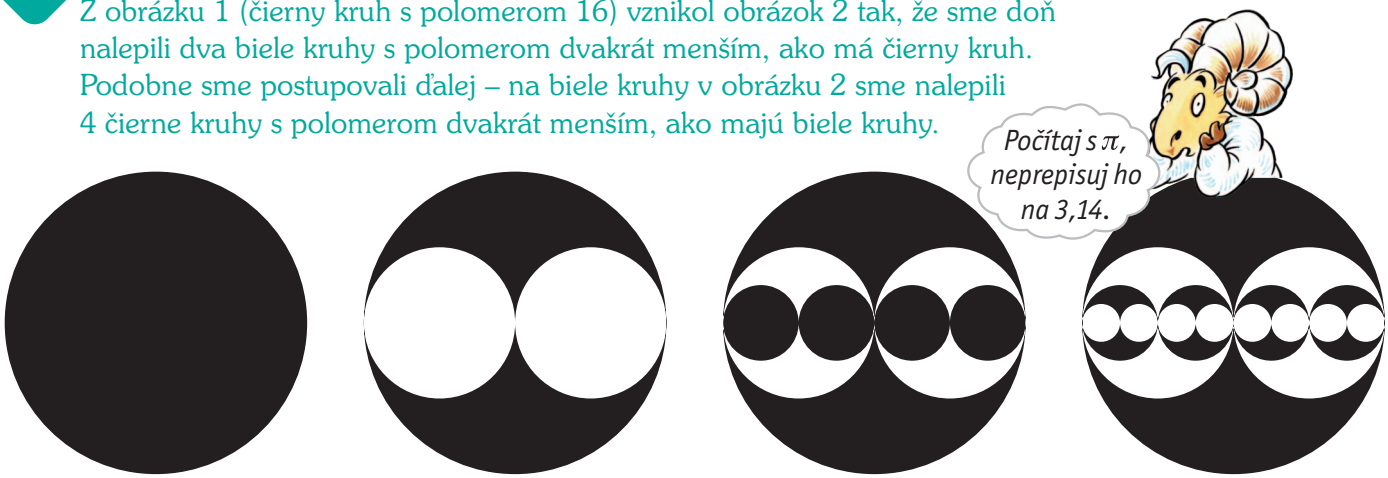
## A11

Chlapci spolu sledovali futbalový zápas a popritom si pripravili pizzu. Každý z nich svoju pizzu rozkrájal inak. Rozkrájal si niekto pizzu na kruhové výseky?




Na počte kúskov nezáleží. Dôležité je, aby rezy boli priemermi pizze, takže všetky musia prechádzať cez stred pizze. Adam, Cyril a Dávi sa zrejme snažili krájať cez stred, ale iba Dávidova pizza vyzerá byť rozkrájaná cez stred pizze.

**A12** Z obrázku 1 (čierny kruh s polomerom 16) vznikol obrázok 2 tak, že sme doň nalepili dva biele kruhy s polomerom dvakrát menším, ako má čierny kruh. Podobne sme postupovali ďalej – na biele kruhy v obrázku 2 sme nalepili 4 čierne kruhy s polomerom dvakrát menším, ako majú biele kruhy.




Obrázok 1 Obrázok 2 Obrázok 3 Obrázok 4

**a** Urč, akú časť obrázka 2 tvorí čierna a akú biela farba.

Obsah čierneho kruhu (obrázok 1): $S_{kruh} = \pi \cdot 16 \cdot 16 = 256\pi$

Polomer bieleho kruhu (polovica polomeru čierneho kruhu): 8

Obsah bielej časti: $S_{2\,B} = 2 \cdot (\pi \cdot 8 \cdot 8) = 128\pi$.

Obsah čiernej časti: $S_{2\,Č} = S_{kruh} - S_{2\,B} = 256\pi - 128\pi = 128\pi$.

Obsahy sú rovnaké, takže polovica obrázka 2 je čierna a polovica biela.

**b** Urč, akú časť obrázka 3 tvorí čierna a akú biela farba.

Polomer malého čierneho kruhu (polovica polomeru bieleho kruhu): 4

Obsah malého čierneho kruhu: $\pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi$.

Obsah bielej časti: $S_{3\,B} = S_{2\,B} - 4 \cdot 16\pi = 128\pi - 64\pi = 64\pi$

Obsah čiernej časti: $S_{3\,Č} = S_{kruh} - S_{3\,B} = 256\pi - 64\pi = 192\pi$.

Pomer obsahov: $\frac{S_{3Č}}{S_{3B}} = \frac{192}{64} = \frac{3}{1} = 3 : 1$

Čierna farba tvorí 3 štvrtiny obrázka, biela farba tvorí 1 štvrtinu obrázka.

**c** Urč, akú časť obrázka 4 tvorí čierna a akú biela farba.

Polomer malého bieleho kruhu (polovica polomeru malého čier. kruhu): 2

Obsah malého bieleho kruhu: $\pi \cdot 2 \cdot 2 = 4\pi$

Obsah bielej časti: $S_{4\,B} = S_{3\,B} + 8 \cdot 4\pi = 64\pi + 32\pi = 96\pi$

Obsah čiernej časti: $S_{4\,Č} = S_{kruh} - S_{4\,B} = 256\pi - 96\pi = 160\pi$

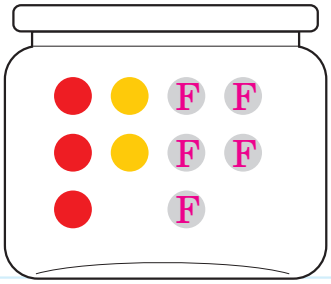
Pomer obsahov: $\frac{S_{4Č}}{S_{4B}} = \frac{160}{96} = \frac{80}{48} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 5 : 3$

Čierna farba tvorí 5 osmín obrázka a biela farba tvorí 3 osminy obrázka.

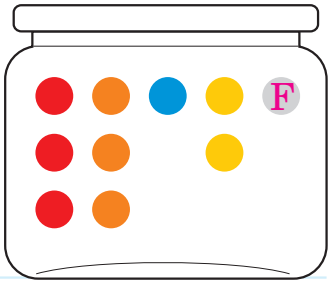
# 9 Pravdepodobnosť a štatistika

**A1** Do nádoby dokresli lentilky rôznych farieb tak, aby pravdepodobnosť náhodného vytiahnutia

**a** červenej lentilky bola 30 % a súčasne žltej lentilky bola jedna pätina. Zdôvodni susedovi správnosť svojho riešenia.



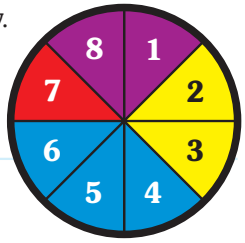

**b** červenej alebo oranžovej lentilky bola 60 % a súčasne modrej alebo žltej lentilky bola 30 %. Zdôvodni susedovi správnosť svojho riešenia.




*V tejto úlohe existuje viacero riešení. Cieľom je, aby žiaci vedeli vysvetliť, ako pri riešení uvažovali (napr. ak si zvolím „základ“ 10 lentiliek, stačí dodržať pomer a nezabudnúť doplniť inofarebné lentilky), a ukázať, že jednotlivé pravdepodobnosti sedia. (F znamená ľubovoľná iná farba ako tá, ktorá sa v zadaní vyskytuje).*

**A2** Saša chce na svojej narodeninovej oslave trochu zábavy a tak vymyslela hru *Koleso Saša* s takýmito pravidlami:

Ak vytočíš červené pole, vyhráš 60 bodov.
Ak vytočíš žlté pole, vyhráš 20 bodov.
Ak vytočíš modré pole, prehráš 15 bodov.
Ak vytočíš fialové pole, prehráš 5 bodov.




**a** Po niekoľkých kolách mala Sašina kamarátka Kristína 65 bodov. Je pravdepodobnejšie, že po ďalšom kole bude mať 85 bodov alebo 60 bodov?

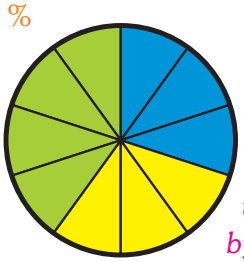
85 bodov bude mať, ak vytočí žlté pole, 60 bodov, ak vytočí fialové pole. Fialové polia sú 2, rovnako ako žlté polia, je teda rovnaká šanca, že po ďalšom kole bude mať 85 bodov alebo 60 bodov.

**b** Kristína napokon skončila s 50 bodmi a povedala: *„To nie je fér, v tejto hre skôr prehráš, ako vyhráš!“* Saša: *„Ale spolu môžeš vyhrať až 100 bodov, pričom prehrať môžeš len 55 bodov. Takže to je fér!“* S ktorou z nich súhlasíš? Zdôvodni svoju odpoveď.

Kristína má pravdu, lebo koleso má 3 polia na výhru a 5 polí na prehru. Prehra je teda viac pravdepodobná. Sašino tvrdenie je nesprávne, lebo koleso zastane vždy len na jednom poli, nemôžeme teda iba spočítať hodnoty polí.

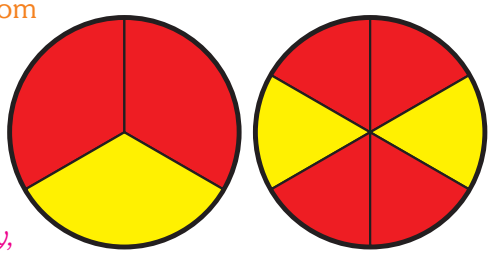
**A3**

**a** Nakresli koleso šťastia, v ktorom pravdepodobnosť toho, že koleso zastane na zelenom poli, je 30 % a na modrom 40 %.



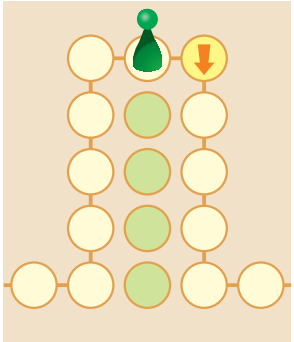
*V úlohe a) aj b) existuje viacero riešení. Cieľom je, aby žiaci vedeli vysvetliť, ako pri riešení uvažovali, a ukázať, že jednotlivé pravdepodobnosti sedia.*

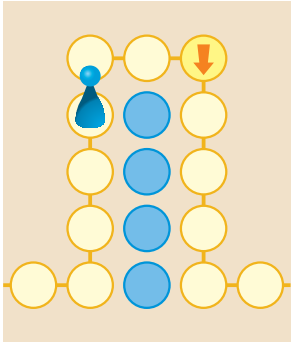
**b** Nakresli dve rôzne kolesá šťastia, v ktorých pravdepodobnosť toho, že koleso zastane na červenom poli je $\frac{2}{3}$.



*Žlté polia v riešeniach môžu byť ľubovoľnej farby, ktorá je iná ako farby v zadaní.*

**A4** Lea s Jurkom sa hrajú Človeče nehnevaj sa.
Lea hrá so zelenými panáčikmi, Jurko s modrými.
Obaja sa blížia do domčeka.

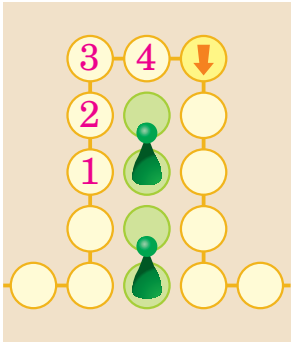




**a** Vysvetli, u koho je väčšia pravdepodobnosť, že sa po ďalšom hode dostane do domčeka.

Lea sa dostane do domčeka,
ak hodí 1, 2, 3, 4, čo sú 4 zo 6 možností.
$P_{Lea} = \frac{4}{6} = 0,\overline{6}$
Jurko sa dostane do domčeka, ak hodí 3, 4, 5, 6, čo sú tiež 4 zo 6 možností.
$P_{Jurko} = \frac{4}{6} = 0,\overline{6}$
Obaja majú rovnakú pravdepodobnosť.

**b** Neskôr sa Lea dostala k domčeku s tretím panáčikom. Vysvetli, na ktorých políčkach by mohol jej panáčik stáť, aby sa po ďalšom hode dostala do domčeka s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$.




Pravdepodobnosť $\frac{1}{3}$ vieme napísať ako $\frac{2}{6}$, čo znamená,
že do domčeka sa môže dostať dvoma spôsobmi.
Ak bude stáť na políčku 1, tak vyhovuje hod 4 alebo 6.
Ak bude stáť na políčku 2, tak vyhovuje hod 3 alebo 5.
Ak bude stáť na políčku 3, tak vyhovuje hod 2 alebo 4.
Ak bude stáť na políčku 4, tak vyhovuje hod 1 alebo 3.
Na iných políčkach jej vyhovujú menej ako dve možnosti.
Možnosti sú teda 4.

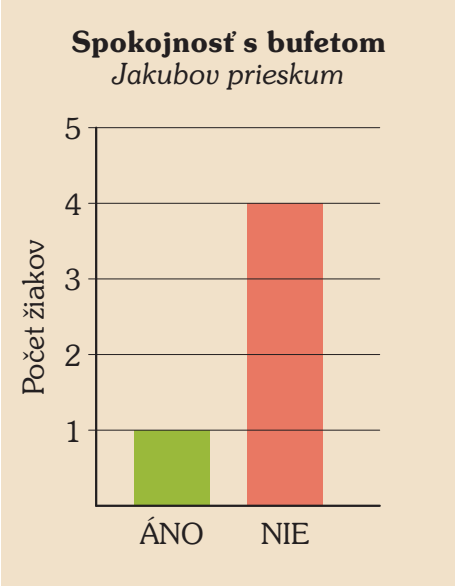
**c** Predstavme si situáciu, že Jurko stojí pred prázdnym domčekom. Na ktorom políčku by musel stáť, aby pravdepodobnosť, že sa pri nasledujúcom hode dostane do domčeka, bola 100 % ?

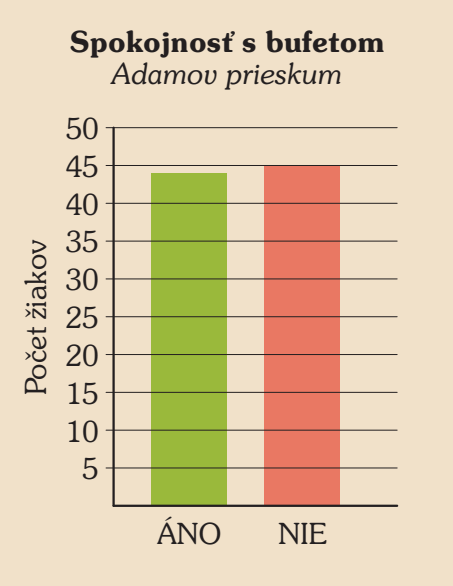
Neexistuje také políčko, aby sa pri ľubovoľnom hode
istotne dostal do domčeka, pretože v domčeku sú iba 4 políčka
a všetkých možností pri jednom hode je 6.

**d** Na ktorom políčku by musel Jurko stáť, aby bola jeho pravdepodobnosť dostať sa po ďalšom hode do domčeka nulová? Vysvetli to.

Na ľubovoľnom políčku, ktoré je vzdialené 6 alebo viac políčok od domčeka,
lebo je nulová pravdepodobnosť, že na kocke hodí viac ako 6.

**A5** Na ZŠ Dubová chodí spolu 425 žiakov. Jakub a Adam urobili v ten istý deň medzi žiakmi školy prieskum. Svoje výsledky prezentovali stĺpcovým diagramom.



**a** Ktoré závery možno odvodiť z Jakubovho prieskumu a ktoré z Adamovho?

Z Jakubovho prieskumu možno vyvodiť, že väčšina opýtaných žiakov nie je spokojná s bufetom. Z Adamovho, že medzi ním oslovenými žiakmi je spokojnosť skoro rovnaká ako nespokojnosť.

**b** V čom je rozdiel medzi Jakubovým a Adamovým prieskumom?

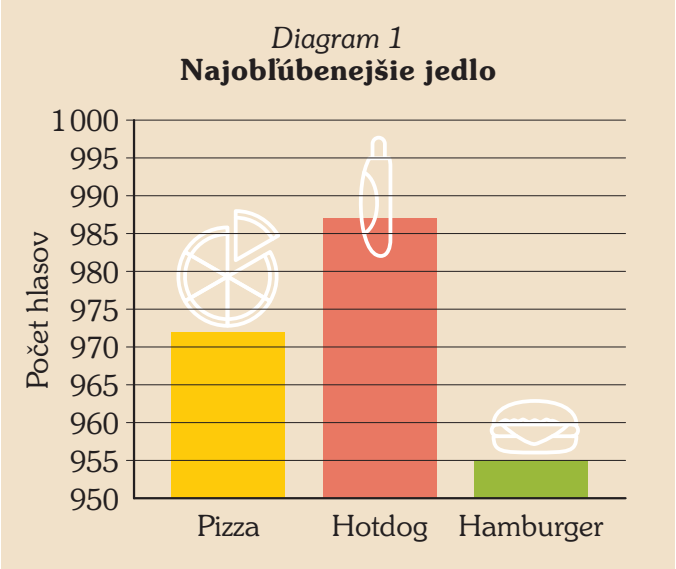
Vo výsledku, ktorý súvisí s počtom respondentov. Jakub získal odpoveď len od 5 žiakov (čo je len o trochu viac ako 1 % žiakov), kým Adam skoro od 90 žiakov (čo je približne 20 % žiakov školy).

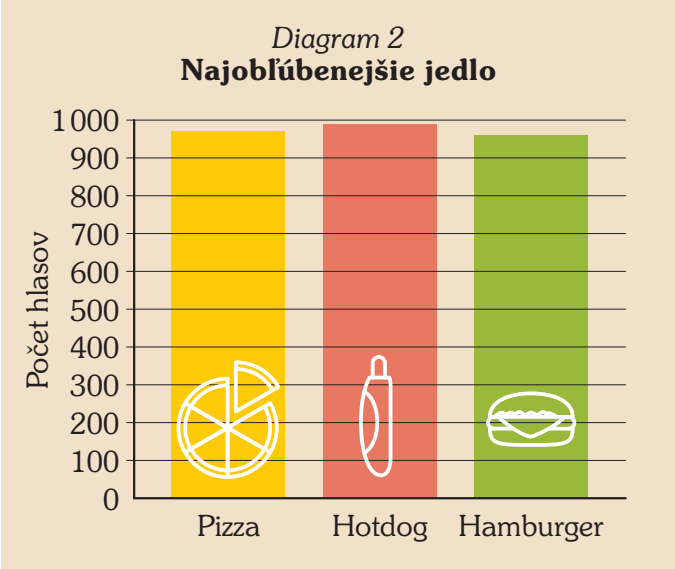
**c** Ktorý diagram dáva lepší obraz o tom, čo si žiaci ZŠ Dubová myslia o bufete? Svoju odpoveď zdôvodni.

Lepší obraz dáva Adamov diagram, pretože sa spýtal viac žiakov, a preto sú jeho výsledky reprezentatívnejšie.

*Cieľom tejto úlohy je upriamiť pozornosť žiakov na možné zavádzajúce výsledky prieskumov, ak je vzorka príliš malá – vedieť kriticky zhodnotiť výsledky štatistického prieskumu a vedieť svoje rozhodnutie obhájiť.*

**A6** Sledovatelia influencera NAMNAM sa zúčastnili ankety o svojom najobľúbenejšom jedle. Ich odpovede sú graficky znázornené dvomi rôznymi spôsobmi.




**a** Zhodnoť, do akej miery súhlasíš s týmito tvrdeniami:

**Tvrdenie 1:**
*Diagram 1 ukazuje, že sledovatelia obľubujú hamburger oveľa menej ako hotdog.*

Z toho, ako je diagram 1 vytvorený, sa zdá, že hlasujúci obľubujú hamburger oveľa menej ako hotdog.

**Tvrdenie 2:**
*Diagram 2 ukazuje, že sledovatelia obľubujú hamburger len o trošku menej ako hotdog.*

Z toho, ako je diagram 2 vytvorený, sa zdá, že hlasujúci obľubujú hamburger len o trošku menej ako hotdog.

**b** Približne o koľko menej sledovateľov, ktorí sa zúčastnili ankety, obľubuje hamburger menej ako hot dog? Z ktorého diagramu to vieš lepšie určiť?

Približne o 32 sledovateľov menej.
Ľahšie sa to dá určiť z diagramu 1.

**c** Ktorý diagram dáva lepší obraz o výsledkoch prieskumu? Zdôvodni svoju odpoveď.

Oba diagramy sú správne, ale rozdiel 32 v odpovedi nie je taký obrovský, ak vezmeme do úvahy, že za každú možnosť hlasovalo takmer 1 000 sledovateľov. Preto diagram 2 poskytuje lepší obraz o výsledkoch prieskumu, keďže vizualizácia v diagrame 1 môže byť zavádzajúca, ak si nevšimneme hodnoty na osi $y$.

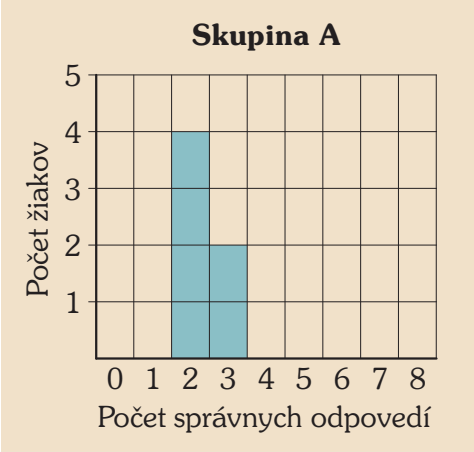
**d** Aký titulok by bol vhodný pre diagram 1?

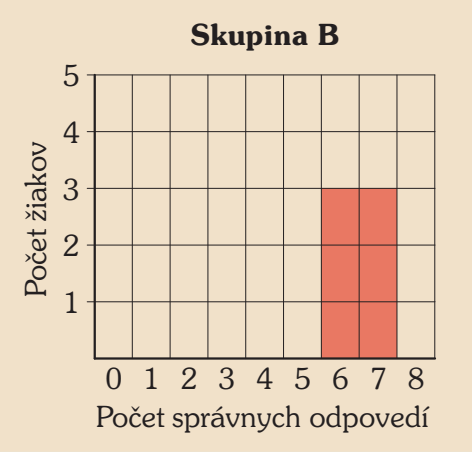
Napr.
Pizza a hamburger (tesne) za hotdogmi.

*Cieľom tejto úlohy je upriamiť pozornosť žiakov na možné zavádzajúce interpretácie diagramov, ak sa spoliehame na ich vizuálnu stránku, t. j. vedieť kriticky zhodnotiť, ktorý diagram je vhodný v ktorej situácii, a ako správne interpretovať graficky zobrazené údaje.*

**A7** Pani učiteľka zostavila pre deviatakov dva varianty testu s ôsmimi úlohami. Výsledky skupín A a B zobrazila graficky – znázornila počty žiakov, ktorí dosiahli určitý počet správnych odpovedí.

Možno bez počítania priemeru povedať, ktorá skupina dopadla v teste lepšie? Zdôvodni svoju odpoveď.



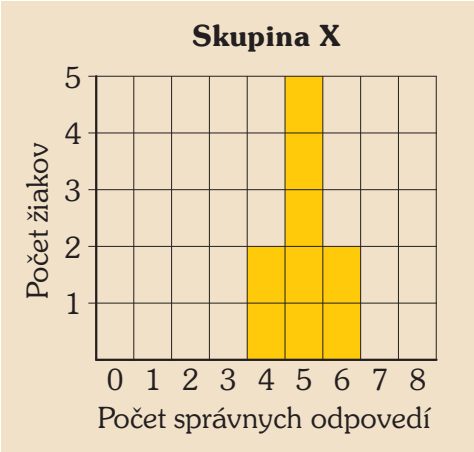



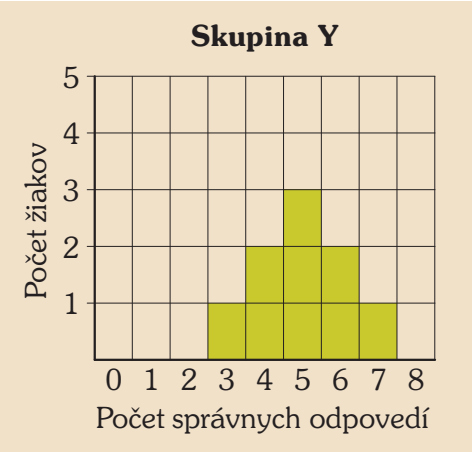

Skupina B dopadla lepšie, lebo všetci žiaci vyriešili správne aspoň 6 úloh, zatiaľ čo ani jeden žiak v skupine A nevyriešil viac ako 3 úlohy.

*Cieľom úlohy je rozvíjať u žiakov štatistické zdôvodňovanie, ktoré súvisí s interpretáciou štatistických dát zobrazených graficky.*

**A8** Pani učiteľka zostavila pre ôsmakov dva varianty testu s 8 úlohami. Výsledky skupín X a Y zobrazila graficky.

**a** Urč priemer počtu správne vyriešených úloh v oboch skupinách.




Skupina X:

$$\frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 2}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

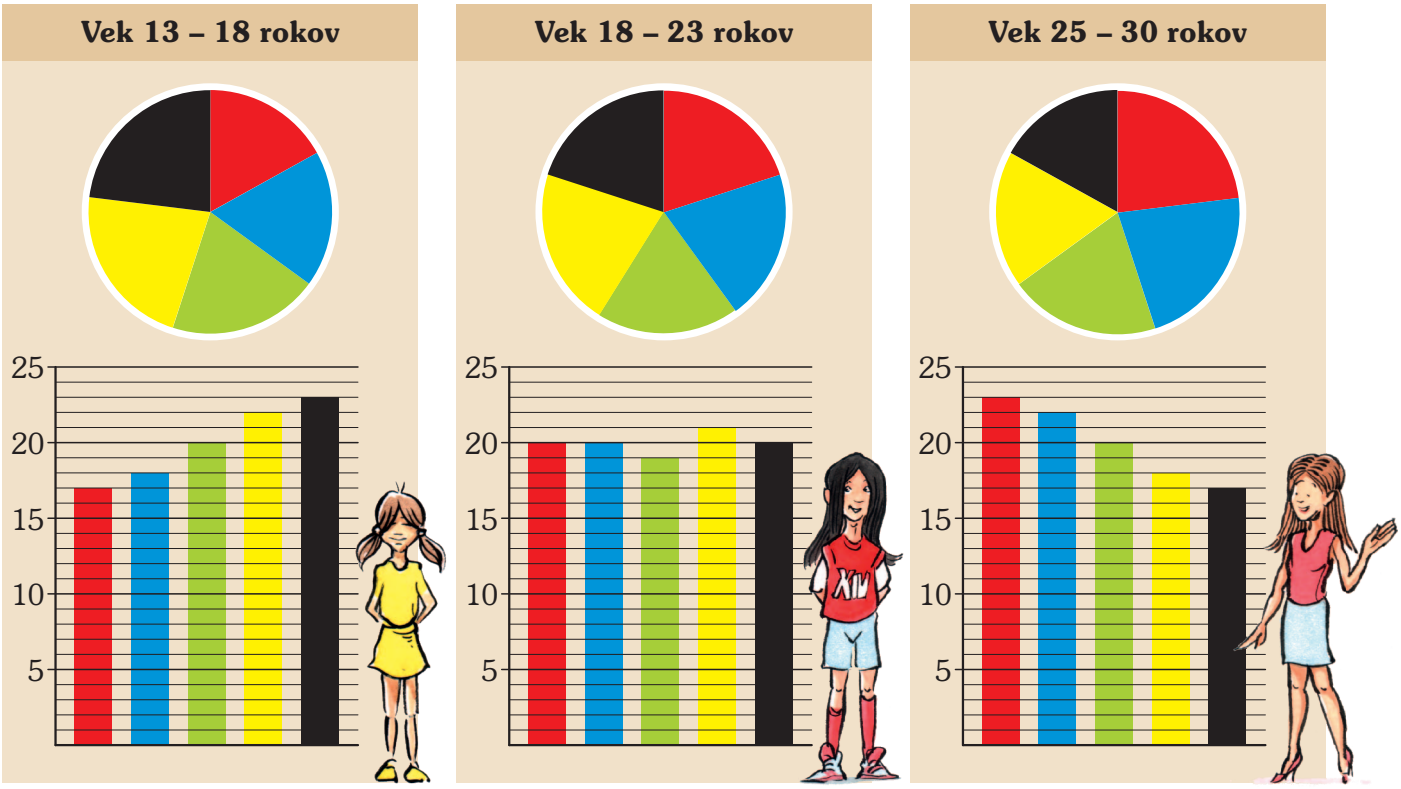
Skupina Y:

$$\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

**b** Vysvetli, ako mohla pani učiteľka tvrdiť, že skupina X dopadla v teste lepšie. Má pravdu?

Priemer správnych odpovedí je v oboch skupinách 5, lenže
– výsledky skupiny X sú však viac-menej „rovnaké“ (všetci mali 4 – 6 správnych odpovedí, teda aspoň polovicu),
– výsledky skupiny Y sú rôznorodejšie ( 3 – 7 správnych odpovedí) – jeden žiak dopadol veľmi dobre a jeden zle (menej ako polovica správnych odpovedí).
Preto mohla pani učiteľka tvrdiť, že skupina X dopadla celkovo lepšie.
Žiaci v skupine X mali takmer rovnako dobré výsledky, zatiaľ čo v skupine Y boli medzi žiakmi väčšie rozdiely.

**A9** Ada chce odprezentovať výsledky svojho prieskumu o obľúbenosti farieb v troch rôznych vekových kategóriách. Nevie sa však rozhodnúť, či má použiť kruhový alebo stĺpcový diagram. Čo jej poradíš a prečo?




Kruhový diagram vyzerá rovnako pre všetky vekové kategórie a len veľmi ťažko v ňom vidno rozdiely medzi obľúbenými farbami. Nevieme tiež povedať, koľko ľudí odpovedalo.
Zo stĺpcového diagramu sa dajú ľahšie vyčítať výsledky, určiť rozdiely medzi odpoveďami i určiť, koľko ľudí sa približne zúčastnilo prieskumu. Preto je v tomto prípade stĺpcový diagram vhodnejší.

**A10** Roman urobil medzi spolužiakmi v triede prieskum o zvieratách, ktoré doma chovajú. Výsledky zaznamenal do tabuľky.

| Druh zvieraťa | Počet žiakov |
|---|---|
| pes | 5 |
| mačka | 3 |
| škrečok | 2 |
| morské prasa | 4 |
| zajac | 1 |
| papagáj | 1 |

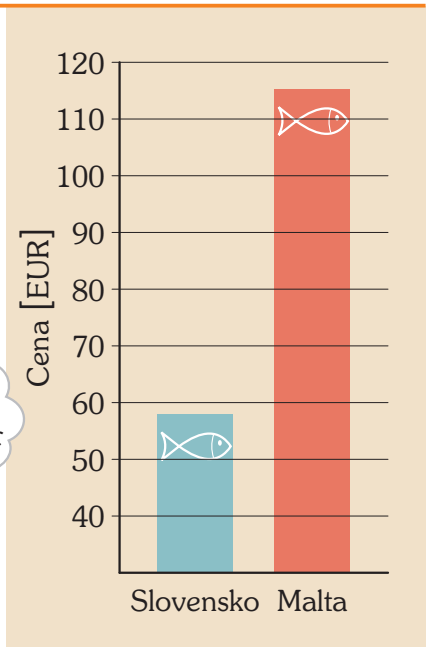
**a** Možno z údajov v tabuľke jednoznačne určiť počet žiakov v Romanovej triede?

Nie, lebo nevieme, či každý žiak má (práve jedno) zviera. Niektorí môžu mať viac ako jedno (v tabuľke sú zarátaní viackrát) a niektorí nemusia mať žiadne zviera (v tabuľke nie sú uvedení vôbec).

**b** Roman výpočtom $(5 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1) : 6 = 2{,}67$ určil, že jeho spolužiaci majú doma priemerne 2,67 zvieraťa. Je jeho úvaha správna? Vysvetli, prečo si to myslíš.

Nie je, lebo nerobil prieskum o počte zvierat, ktoré jeho spolužiaci majú, ale o druhoch zvierat. Najviac 16 žiakov v triede má doma nejaké zviera a nemá zmysel tento počet deliť 6, čo je pravdepodobne počet rôznych zvierat, ktoré žiaci doma majú.

**A11** Stĺpcový diagram porovnáva priemerné výdavky jedného obyvateľa na Slovensku a na Malte na ryby v roku 2021. S kým súhlasíš a prečo?




Fero má pravdu, výdavky na Slovensku boli niečo pod 60 eur na osobu a na Malte asi 115 eur, čo je približne dvojnásobok.
Eva nemá pravdu, lebo to by Malťania museli minúť viac ako 150 eur na osobu. Nestačí porovnať výšku stĺpcov, mala si pozrieť aj hodnoty na osi $y$.
Jakub nepovedal nič o porovnaní výdavkov Slovákov a Malťanov.

**A12** V bytovke býva 6 rodín, pričom priemerný počet detí na rodinu je 4.
V bytovke nebýva ani jedna bezdetná rodina a ani jedna rodina nemá viac ako 6 detí.

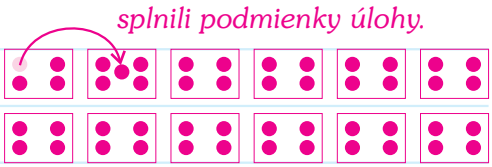
**a** Koľko detí býva v bytovke?

Rodín je 6, priemerný počet detí je 4, teda v bytovke býva $6 \cdot 4 = 24$ detí.

**b** Je možné, aby za daných podmienok mala každá rodina rozdielny počet detí?

Nie je. Jediná možnosť, ako môže mať každá rodina iný počet detí, ale zároveň najmenej jedno a najviac šesť, je $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.
To však nesedí s tým, že v bytovke je spolu 24 detí (úloha a).

**c** Je možné, aby v bytovke nebývala ani jedna rodina so 4 deťmi?

Je to možné.
Vieme nájsť viacero možností rozdelenia 24 detí do rodín tak, aby priemerný počet bol 4, ale v každej rodine bol počet detí rôzny od 4. Napr.: $6 + 6 + 6 + 2 + 2 + 2 = 24$
$6 + 6 + 5 + 3 + 3 + 1 = 24$

*Úloha sa dá riešiť aj graficky, resp. manipuláciou s objektmi (napr. korálky). Šesť rodín predstavuje 6 „kôpok“, priemerne má každá 4 deti (vyjadrené korálkami). Korálky presúvame z jednej kôpky na druhú tak, aby sme splnili podmienky úlohy.*