I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

8

Argumentácia v matematike

pre 8. ročník ZŠ
a 3. ročník GOŠ

1. zošit

Projekt **MaTeK**

Orbis**P**ictus**I**stropolitana

1 Počtové výkony s celými číslami

A1

a Vyplň v tabuľke stĺpce 2 až 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
o 6 viac	7	1	8	–1	9	–3	10	–5	11
o 3 viac	4	–2	5	–4	6	–6	7	–8	8
	1	–5	2	–7	3	–9	4	–11	5
o 2 menej	–1	–7	0	–9	1	–11	2	–13	3
o 5 menej	–4	–10	–3	–12	–2	–14	–1	–16	0

b Nájdi zákonitosť v treťom riadku tabuľky a doplň ďalšie dve čísla, ktoré podľa tejto zákonitosti v postupnosti nasledujú. Zdôvodni svoje riešenie. Vyplň v tabuľke aj stĺpce 8 a 9.

Čísla tretieho riadka sú tvorené z dvoch striedajúcich sa postupností:

1 2 3 4 5 – zväčšuje sa vždy o 1

–5 –7 –9 –11 – zmenšuje sa vždy o 2

Cieľom tejto úlohy je rozpoznať postupnosť, vysloviť tvrdenie o chýbajúcich číslach a zdôvodniť ho.

A2

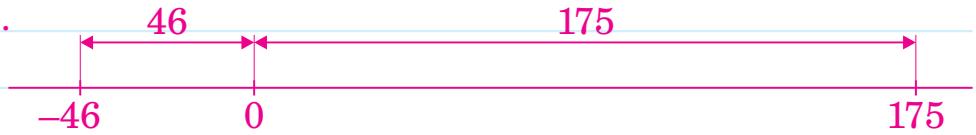
Ema dostala za úlohu určiť rozdiel medzi –46 a 175. Vie, že rozdiel znamená odčítať, tak čísla odčítala a dostala 175 – 46 = 129. Vypočítala úlohu správne? Zdôvodni svoj názor.

Nie, lebo Ema neodčítala čísla –46 a 175, ale čísla 46 a 175.

Rozdiel čísel znamená, o koľko sa od seba líšia.

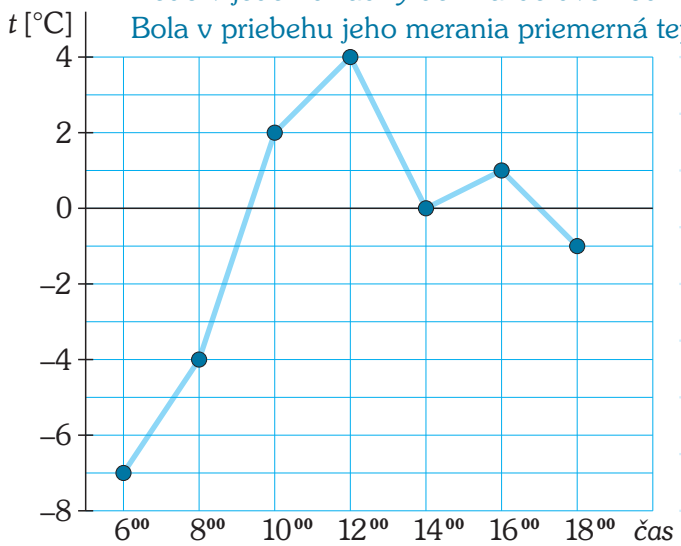
Na číselnej osi vidíme, že sú od seba vzdialené 46 + 175 = 221.

Ich rozdiel je teda 221.



A3

Dedo v jeden chladný deň každé dve hodiny medzi 6:00 a 18:00 zaznamenával teplotu. Bola v priebehu jeho merania priemerná teplota kladná alebo záporná? Svoju odpoveď zdôvodni.



Dedo urobil spolu 7 meraní.

Z grafu odčítame namerané teploty a z nich určíme priemernú hodnotu.

$$\frac{(-7)+(-4)+2+4+0+1+(-1)}{7} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$$

Výsledok je menší ako nula, priemerná teplota bola preto záporná.

A4

Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy a vysvetli, prečo si to myslíš.

a Súčet (nejakých) dvoch čísel je kladné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. 3 + 5 je kladný výsledok, ale 3 + (–5) záporný.

b Súčet dvoch záporných čísel je záporné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo ak k dlhu pripočítame dlh, budeme mať dlh ešte väčší.

c Rozdiel dvoch záporných čísel je záporné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. –5 – (–2) = –3, ale –2 – (–5) = 3.

d Súčet kladného a záporného čísla je kladné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. –3 + 5 je kladný výsledok, ale 3 + (–5) záporný.

e Súčet absolútnych hodnôt dvoch záporných čísel je záporné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo absolútna hodnota čísla je vždy nezáporná (je to vzdialenosť), sčitujeme teda dve kladné čísla a ich súčet je vždy kladný, nikdy nie je záporný.

A5

Predstav si, že máš **po dve** magické závažia z každého druhu ako na obrázku.

M A G I

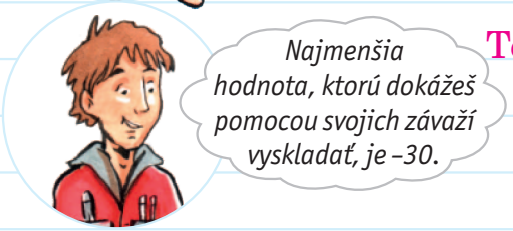
Ich rôzne kombinácie ti umožňujú vytvárať rôzne súčty. Napríklad:

$M + 2A + G = 1 + 2 \cdot (-4) + 9 = 2$

$2M + 2G + I = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + (-26) = -6$

a Má pravdu Lea alebo Teo? Zdôvodni svoj názor.

Lea má pravdu, lebo ak chceme dostať najväčší súčet, zoberieme len kladné hodnoty 1 a 9. Z oboch máme len po dve, preto vieme dostať hodnotu maximálne $2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 = 20$.



Teo sa mýli, lebo ak chceme dostať najmenší súčet, zoberieme len záporné hodnoty –4 a –26. Z oboch máme po dve, preto vieme dostať hodnotu $2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-26) = -8 + (-52) = -60$.

b Zo svojich závaží vyskladaj súčty 1, 2, 3 a 4.

$1 = 1 = M$ alebo $1 = 9 + 2 \cdot (-4) = G + 2A$

$2 = 2 \cdot 1 = 2M$ alebo $2 = 9 + 2 \cdot (-4) + 1 = G + 2A + M$

$3 = 9 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = G + 2M + 2A$

Súčet 4 sa nedá vyskladať, keďže z každého druhu mám len po 2 závažia.

Žiakom môžete zadať navyše úlohu systematicky overiť všetky kombinácie závaží a ukázať, že súčet 4 sa nedá vyskladať.

A6

Vezmime si štyri po sebe idúce záporné čísla, usporiadané vzostupne, napr. –8, –7, –6, –5.
Ak medzi ne umiestnime znamienka + alebo –, dostaneme rôzne výsledky.

–8 + –7 + –6 + –5 = –26

–8 + –7 – –6 – –5 = –4

a Nájdi všetky ostatné možnosti umiestnení znamienok + a –. Vypočítaj výslednú hodnotu.

–8 + –7 + –6 – –5 = –16

–8 + –7 – –6 + –5 = –14

–8 – –7 + –6 + –5 = –12

–8 – –7 + –6 – –5 = –2

–8 – –7 – –6 + –5 = 0

–8 – –7 – –6 – –5 = 10

–8 ● –7 ● –6 ● –5 = ☐

–8 ● –7 ● –6 ● –5 = ☐

Rôznych možností rozmiestnenia znamienok je iba 8.

b V dvojici alebo v skupine vyberte štvoricu jednociferných po sebe idúcich záporných čísel. Doplň všetky možnosti znamienok + a – pre svoju štvoricu a vypočítaj výsledné hodnoty. Potom si navzájom skontrolujte výsledky.

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

☐ ● ☐ ● ☐ ● ☐ = ☐

c Preštudujte spolu, ako výsledky v úlohách a) a b) závisia od výberu znamienok.
Čo ste si všimli? Vytvorte čo najviac tvrdení.

Ak budú všetky znamienka mínus, výsledok bude vždy kladný.

Ak budú aspoň dve znamienka plus, výsledok bude vždy záporný.

Bez ohľadu na výber znamienok výsledok bude vždy párny.

d Pani učiteľka napísala na tabuľu dve tvrdenia o ľubovoľnej štvorici po sebe idúcich záporných čísel.
Zdôvodni, prečo tvrdenia platia.

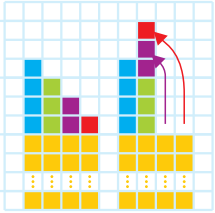
Tvrdenie 1: Ak budú všetky znamienka plus, výsledok bude vždy záporný.

Sčitujem štyri záporné čísla.
To je, akoby som na začiatku bol v dlhu a potom si ešte 3-krát požičal peniaze.
Skončím tak v ešte väčšom dlhu.

*Žiaci môžu **zdôvodňovať analógiou** (dostatočná forma pre ZŠ) alebo tiež poznatkom, že súčet dvoch záporných čísel je záporný. Sčitujeme 4 záporné čísla, teda (medzi)súčet prvého a druhého čísla je záporný, (medzi)súčet tretieho a štvrtého čísla je záporný a napokon aj finálny súčet dvoch (medzi)súčtov je záporný (**deduktívne zdôvodnenie**).*

Tvrdenie 2: Ak budú všetky znamienka mínus, výsledok bude vždy kladný.

Znamienka mínus zmenia hodnotu troch posledných čísel na kladnú.
Sčitujeme teda tri kladné čísla, výsledok sčítania je kladný.
Napokon odčítame prvé číslo z pôvodnej štvorice.
To je určite menšie ako doterajší súčet, preto výsledok zostane kladný.



*Na obrázku je zdôvodnenie poslednej časti (**argumentácia generickým príkladom** s grafickou reprezentáciou). Stĺpce znázorňujú ľubovoľné štyri po sebe idúce kladné čísla usporiadané zostupne. Sústreďme sa len na vrchnú časť (postupnosť 4, 3, 2, 1). Vidíme, že 3 + 2 + 1 je viac ako 4, a teda (3 + 2 + 1) – 4 > 0 (kladné číslo). Táto úvaha platí pre ľubovoľné štyri po sebe idúce kladné čísla, lebo vždy z nich možno oddeliť „vrchnú farebnú“ časť 4, 3, 2, 1.*

A7

Doplň chýbajúce čísla tak, aby medzi číslami v hornom a v dolnom riadku jednej tabuľky bola vždy nejaká súvislosť. Vysvetli túto súvislosť.

– 9

7	6	5
–2	–3	–4

Od každého čísla v hornom riadku odpočítame číslo 9.

: 5

20	15	10
4	3	2

Číslo v dolnom riadku je výsledok delenia horného čísla piatimi.

: 2

–6	–8	–12
–3	–4	–6

Číslo v dolnom riadku je výsledok delenia horného čísla dvoma.

· 1,5

2	4	8
3	6	12

Ku každému číslu v hornom riadku pripočítame jeho polovicu alebo ho vynásobíme číslom 1,5.

+10

–4	–2	–6
6	8	4

Ku každému číslu v hornom riadku pripočítame číslo 10.

: (–2)

60	20	100
–30	–10	–50

Číslo v dolnom riadku je výsledok delenia horného čísla číslom –2.

A8

Predstav si, že máš nejaký zlomok. Vieš o ňom, iba to, že:
– jeho čitateľ je súčinom piatich kladných a troch záporných čísel,
– jeho menovateľ je súčinom štyroch kladných a dvoch záporných čísel.
Je hodnota tohto zlomku kladná alebo záporná? Zdôvodni svoju odpoveď.

Samotné čísla nehrajú rolu, lebo nepotrebujeme vedieť, aký bude výsledok.
Stačí sa teda sústrediť iba na znamienka.
Kladné čísla znamienko súčinu neovplyvňujú, záleží len na záporných číslach.

Čitateľ ..... 3 záporné čísla → záporný súčin → záporný čitateľ
Menovateľ .... 2 záporné čísla → kladný súčin → kladný menovateľ
Podiel kladného čísla a záporného čísla je záporné číslo → záporný zlomok.

Schematicky sa to dá naznačiť takto: $\frac{\oplus\cdot\oplus\cdot\oplus\cdot\oplus\cdot\oplus\cdot\ominus\cdot\ominus\cdot\ominus}{\oplus\cdot\oplus\cdot\oplus\cdot\oplus\cdot\ominus\cdot\ominus} = \frac{\ominus\cdot\ominus\cdot\ominus}{\ominus\cdot\ominus} = \frac{\oplus\cdot\ominus}{\oplus} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

Úlohu možno riešiť aj „krátením“ znamienok – zostane jedno „mínus“, čo znamená, že výsledok je záporný.
Žiaci možno budú argumentovať na konkrétnych príkladoch.
Dôležité je uvedomiť si, že kladné čísla neovplyvňujú výsledné znamienko.

A9

Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy. Uveď aj dôvod.

a Absolútna hodnota súčtu dvoch záporných čísel je záporné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo absolútna hodnota akéhokoľvek čísla je vždy kladná, je to vzdialenosť od nuly a vzdialenosť nemôže byť záporná.

b Násobením troch po sebe idúcich čísel dostaneme záporné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) < 0$,
$(-2) \cdot (-1) \cdot 0 = 0$,
$1 \cdot 2 \cdot 3 > 0$.

c Podiel dvoch celých čísel nie je nula.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo to platí, iba ak je delenec nenulový.

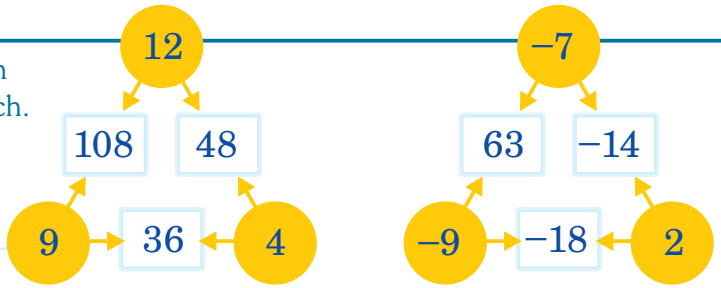
d Každé kladné číslo je väčšie ako ľubovoľné záporné číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo ľubovoľné kladné číslo je väčšie ako 0 a ľubovoľné záporné je menšie ako 0.

A10

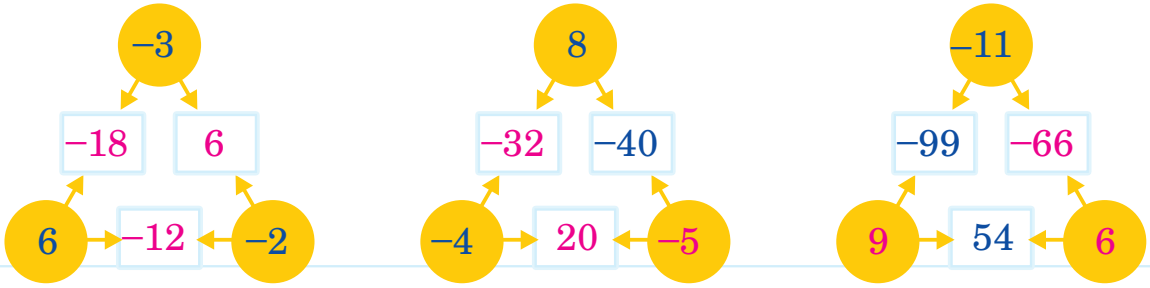
Aritmagon je trojuholník s číslami vo svojich vrcholoch, ktoré určujú čísla na jeho stranách.



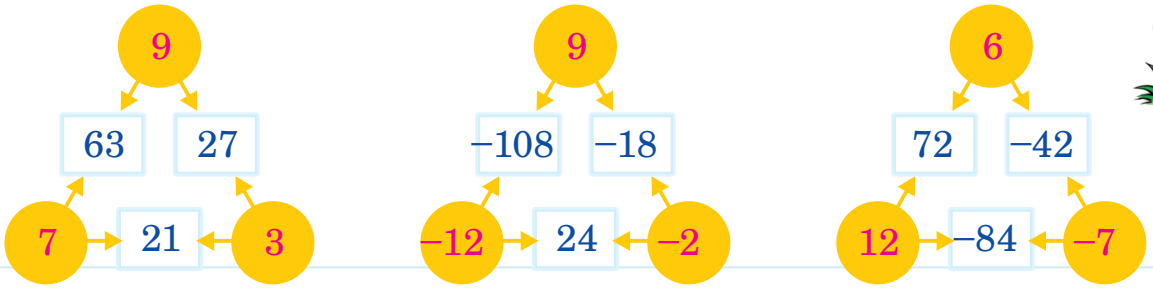
a Zisti, ako čísla vo vrcholoch súvisia s číslami na stranách aritmagonu.

Číslo na strane aritmagonu je vždy súčinom hodnôt v dvoch susedných vrcholoch.

b Doplň chýbajúce hodnoty v aritmagonoch.



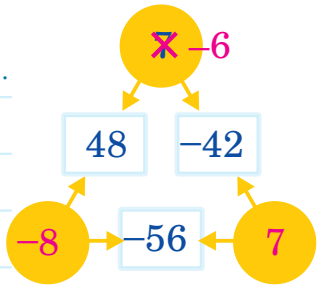
c Vyplň hodnoty vo vrcholoch, ak sú dané iba hodnoty na stranách.



A11 Adam začal vypĺňať aritmagon a ako prvé napísal číslo 7 do horného vrcholu.

a Je jeho uvažovanie správne? Zdôvodni svoj názor. **b** Vyplň Adamov aritmagon.

Áno – nie, lebo číslo 48 nie je deliteľné číslom 7.



A12 Ela vyslovila viacero tvrdení o aritmagonoch. Rozhodni, či má pravdu, a svoje rozhodnutie zdôvodni.

a Každý aritmagon má riešenie. **áno – nie**

Pretože napríklad ak sú na stranách aritmagonu iba prvočísla, riešenie neexistuje.

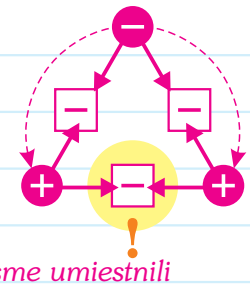
So žiakmi môžete rozobrať všetky prípady (sú dané všetky čísla na stranách, resp. všetky čísla vo vrcholoch, resp. niektoré čísla na stranách, niektoré vo vrcholoch) a diskutovať, či sa vždy dá aritmagon vyriešiť, resp. kedy sa vyriešiť nedá.

b Každý aritmagon s kladnými číslami na stranách, ktorý má riešenie, má ešte aj druhé riešenie. **áno – nie**

Pretože druhé riešenie je také isté, len so zápornými číslami. Súčin dvoch záporných čísel, ale i dvoch kladných čísel, je číslo kladné.

c Ak sú na stranách aritmagonu iba záporné čísla, aritmagon nemá riešenie. **áno – nie**

Pretože ak má byť súčin dvoch čísel záporný, jeden činiteľ musí byť záporný a druhý kladný.

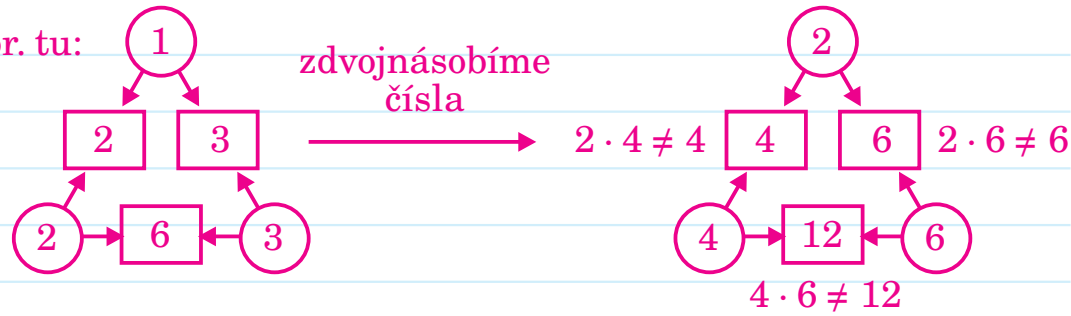


Napr. ak bude záporné číslo v hornom vrchole, v oboch dolných vrcholoch musia byť kladné čísla, aby sedeli znamienka výsledkov na ľavej i pravej strane. Potom však musí byť hodnota na dolnej strane kladná, čo je v rozpore s tvrdením.

Podobne by sme dospeli k rozporu, keby sme umiestnili záporné číslo do pravého dolného alebo ľavého dolného vrcholu.

d Ak zdvojnásobíme čísla na každej strane aritmagonu, zdvojnásobia sa aj čísla v každom vrchole. **áno – nie**

Pretože to neplatí napr. tu:



2 Obvod a obsah rovnobežníka

A1 Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé alebo nepravdivé, a zdôvodni, prečo si to myslíš.

a Všetky rovnobežníky sú štvorce. áno – nie

Lebo niektoré rovnobežníky nemajú všetky susedné strany na seba kolmé, napr. kosoštvorec.

b Niektoré rovnobežníky sú obdĺžniky. áno – nie

Lebo rovnobežníky sú štvoruholníky, ktorých protiľahlé strany sú rovnobežné a majú rovnakú dĺžku. To platí pre všetky obdĺžniky.

c V každom rovnobežníku sú uhlopriečky rovnako dlhé. áno – nie

Lebo to neplatí napr. pre kosoštvorec.

d Ak je štvoruholník štvorec, potom je to rovnobežník. áno – nie

Lebo štvorec je štvoruholník, ktorého protiľahlé strany sú zhodné a rovnobežné.

e Ak je štvoruholník rovnobežník, potom je to štvorec. áno – nie

Lebo medzi rovnobežníky patrí aj kosodĺžnik a ten štvorcom nie je, lebo nemá všetky uhly pravé.

f Každý rovnobežník má dve osi súmernosti. áno – nie

Lebo kosodĺžnik nemá ani jednu os súmernosti.

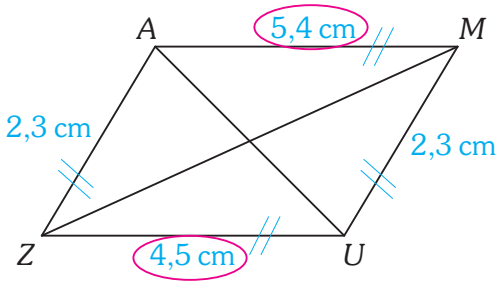
g Niektoré rovnobežníky majú všetky strany rovnako dlhé. áno – nie

Lebo to platí pre štvorec a kosoštvorec.

A2 Nájdi chybný údaj v obrázkoch rovnobežníkov a zdôvodni, prečo bol chybný. Navrhni jeho opravu.

Chybný je nanajvýš jeden údaj na obrázku. Uvedom si však, že môže byť viac možností, ktorý to je.

a



Chyba: $|ZU| \neq |AM|$

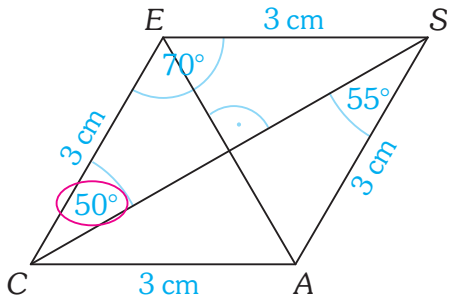
Je to rovnobežník, preto musia byť strany ZU a AM zhodné.

Nesprávna je buď dĺžka 5,4 cm alebo 4,5 cm.

Oprava: 1. možnosť: 5,4 cm zmeniť na 4,5 cm

2. možnosť: 4,5 cm zmeniť na 5,4 cm

b



Chyba: Nesprávna veľkosť $\sphericalangle ECS$.

Je to kosoštvorec, trojuholníky ASE a ACE sú rovnoramenné a zhodné.

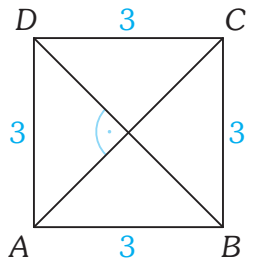
Uhlopriečky delia vrcholové uhly na polovicu.

$|\sphericalangle ECA| = 180° - 35° - 35° = 110°$

$|\sphericalangle ECS| = 110° : 2 = 55°$ ($= |\sphericalangle ASC|$, čo je OK)

Oprava: Veľkosť uhla ECS má byť 55°.

c

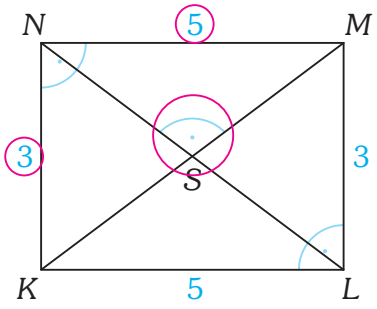


Chyba: –

Všetko je správne.

d

Chyba: $|\sphericalangle NSM| = 90°$



Uhol, ktorý zvierajú uhlopriečky, nemôže byť pravý, lebo je to obdĺžnik a ten nemá uhlopriečky na seba kolmé.

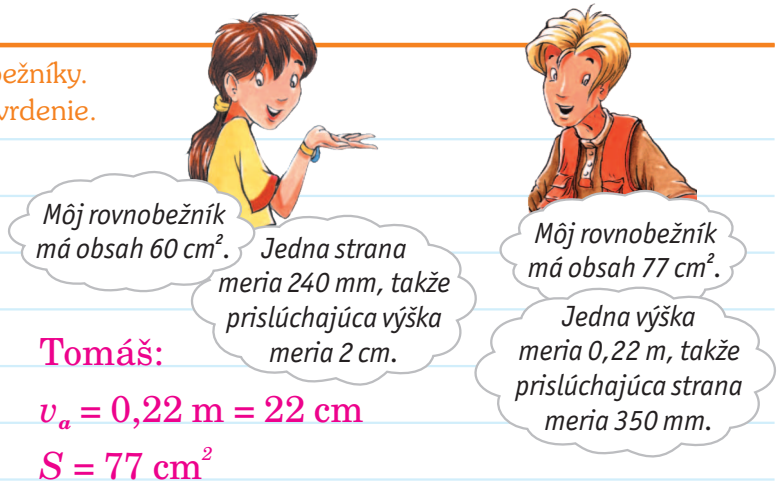
Oprava: 1. možnosť: Zrušiť označenie pravého uhla.

2. možnosť: Obdĺžnik zmeniť na štvorec – buď opravou dĺžok 3 na 5, alebo opravou dĺžok 5 na 3.

Pri 2. možnosti opravy môže vzniknúť diskusia, či je to jeden údaj alebo dva. V prospech tvrdenia, že ide iba o jeden údaj, hovorí napr. to, že podľa zadania to majú byť rovnobežníky, a teda dĺžky protiľahlých strán sú určite rovnaké.

A3

Súrodenci Tina a Tomáš rysovali rovnobežníky. Kto z nich má pravdu? Zdôvodni svoje tvrdenie.



Cieľom tejto úlohy je posúdiť riešenie a rozhodnúť o jeho správnosti.

Tina:

$a = 240\ \text{mm} = 24\ \text{cm}$

$S = 60\ \text{cm}^2$

$v_a = S : a = 60 : 24 = 2{,}5\ \text{cm}$

Tomáš:

$v_a = 0{,}22\ \text{m} = 22\ \text{cm}$

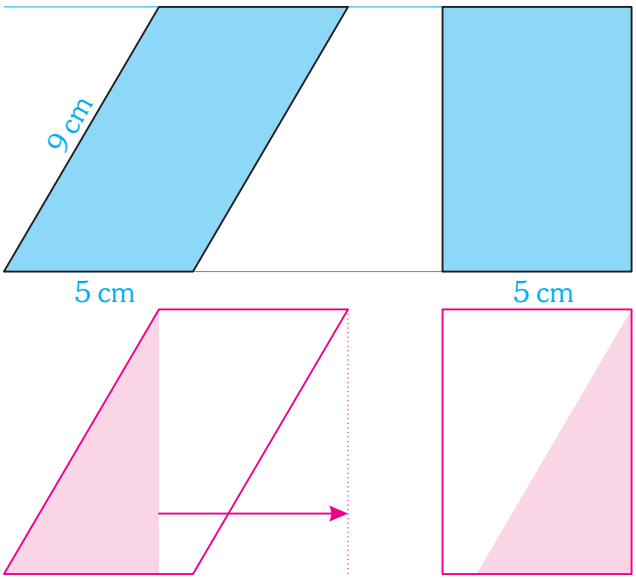
$S = 77\ \text{cm}^2$

$a = S : v_a = 77 : 22 = 3{,}5\ \text{cm} = 35\ \text{mm}$

Ani jeden zo súrodencov nemá pravdu.

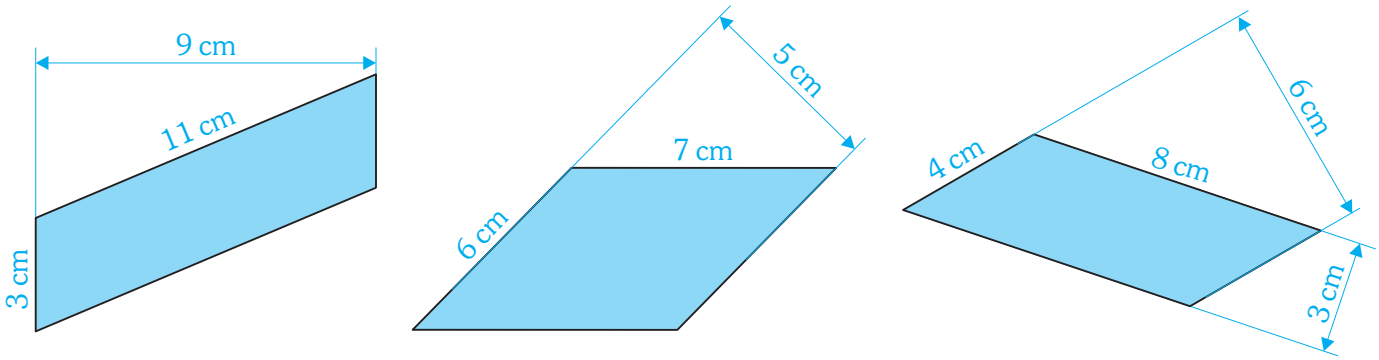
A4

a Dá sa určiť obsah rovnobežníka na obrázku bez akéhokoľvek výpočtu, ak vieš, že obsah obdĺžnika vpravo je 40 cm²? Zdôvodni.



Áno, lebo obdĺžnik a rovnobežník majú rovnakú výšku a aj dĺžku spodnej strany. Preto sú ich obsahy rovnaké.

b Vypočítaj obsah rovnobežníkov.



$S = a \cdot v_a$

$S = 3 \cdot 9$

$S = 27\ \text{cm}^2$

$S = a \cdot v_a$

$S = 6 \cdot 5$

$S = 30\ \text{cm}^2$

$S = a \cdot v_a$

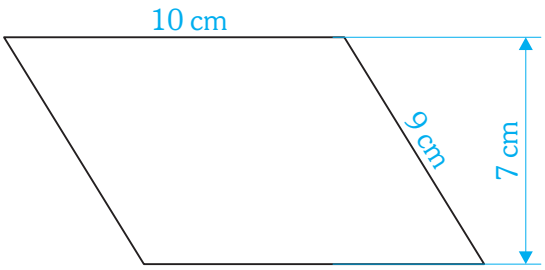
$S = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$

$S = 24\ \text{cm}^2$

Cieľom tejto úlohy je upriamiť pozornosť žiakov na určenie správnych dĺžok na výpočet obsahu.

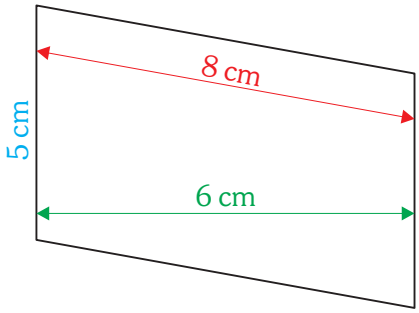
A5 Odpovedz na otázky a svoju odpoveď zdôvodni.

a Je obsah tohto rovnobežníka 70 cm² alebo 90 cm²?



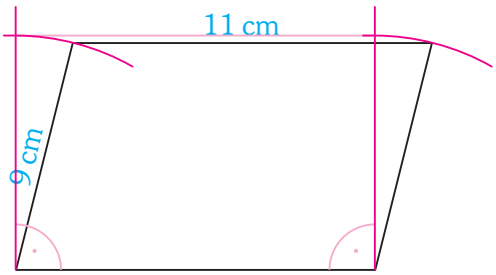
Jeho obsah je 70 cm²,
lebo prislúchajúca výška
k strane dĺžky 10 cm má 7 cm.

b Je obsah tohto rovnobežníka 30 cm² alebo 40 cm²?



Jeho obsah je 30 cm²,
lebo prislúchajúca výška
k strane dĺžky 5 cm má 6 cm.

c Vysvetli, prečo obsah tohto rovnobežníka nie je 99 cm². Je jeho obsah viac alebo menej ako 99 cm²?

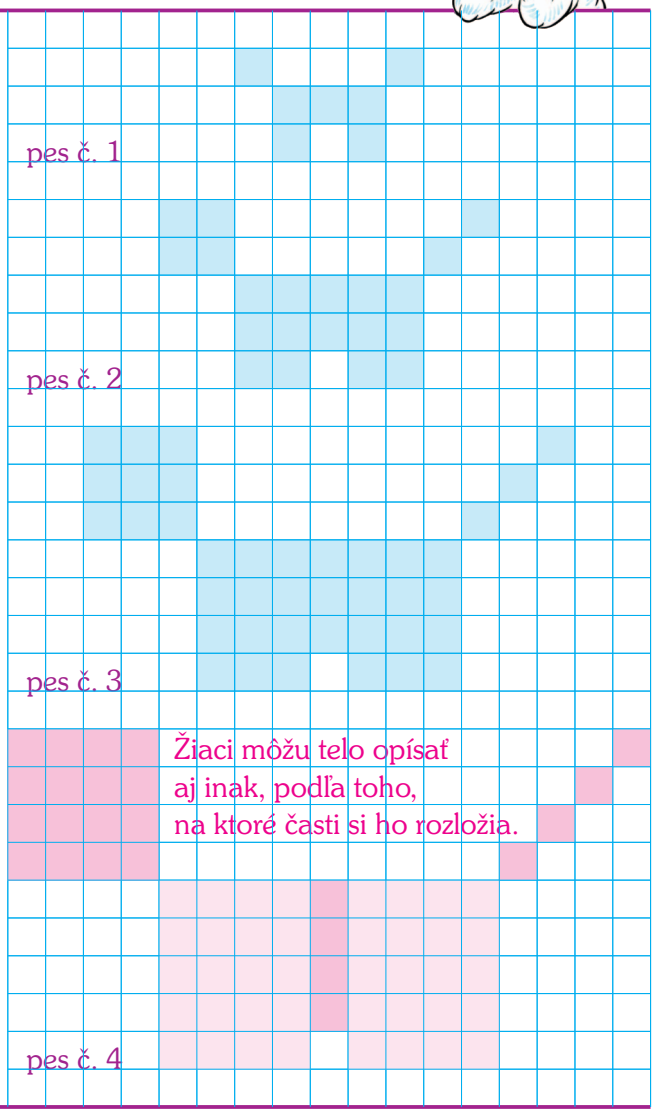


Tu je vhodné pomôcť si dokreslením pomocného obdĺžnika.

Lebo ak by to tak bolo,
musel by mať susedné strany
na seba kolmé (bol by to obdĺžnik).
Obsah rovnobežníka je menej ako 99 cm²,
lebo jeho výška je menšia ako 9 cm.

3 Číselné výrazy

A1 Peter si na štvorčekový papier kreslil postupnosť obrázkov psa. Každý ďalší pes v jeho postupnosti bol väčší ako predchádzajúci.



a Zisti, podľa akých pravidiel Peter kreslil psov vo svojej postupnosti, a podrobne opíš, ako by mal vyzerať pes č. 4. Ako vieš, že tvoj postup je správny?

Napr. hlava bude štvorec 4 × 4, predná časť tela s nohami 4 × 5, stred tela 4 × 1, zadná časť tela s nohami rovnaká ako predná, teda 4 × 5, chvost bude zo 4 štvorčekov.
Z prvých troch obrázkov vidíme, že hlava, stred tela i chvost majú toľko štvorčekov ako číslo psa v postupnosti. Predná i zadná časť tela je o 1 vyššia ako číslo psa, šírka sedí s číslom psa.

b Napíš číselný výraz, podľa ktorého Peter vypočíta počet malých štvorčekov na nakreslenie psa číslo 6 v tejto postupnosti. Urč hodnotu tohto výrazu.

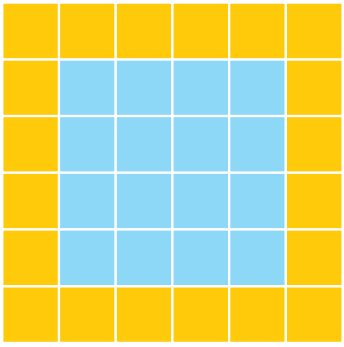
$P_6 = 6 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 =$
$= 36 + 2 \cdot 42 + 2 \cdot 6 = 36 + 84 + 12 = 132$

A2 Lienka sedembodková za svoj život zje v priemere 5 000 vošiek a dožije sa približne 100 dní. Žiaci mali napísať číselný výraz, ktorý vyjadruje počet vošiek, ktoré lienka zje za 5 dní. Vysvetli, čo by žiaci svojimi výrazmi vypočítali, a rozhodni, čí výraz je správny.

Nina $5\,000 \cdot 5$	Vypočíta koľko vošiek zje za svoj život 5 lienok. Jej výraz je nesprávny.
Marko $5\,000 : 100 \cdot 5$	Najprv vypočíta počet zjedených vošiek za 1 deň a potom za 5 dní. Marko napísal správny výraz.
Tereza $5\,000 : 20$	Päť dní je jedna dvadsatina zo 100, takže Tereza počíta, koľko vošiek zje lienka za dvadsatinu svojho života. Preto dostane správny výsledok a jej výraz je správny.

A3

Firma vyrába bazény štvorcového tvaru rôznych veľkostí. Dno bazéna je tvorené modrými kachličkami, okolie (obvodová časť) bazéna jedným radom žltých kachličiek.



a Koľko žltých kachličiek má bazén, ktorého dno má 25 kachličiek?

Ak štvorcové dno tvorí 25 kachličiek, na jednej strane je 5 kachličiek. Na „obvod“ potrebujeme 4 · 5 kachličiek plus 4 rohové kachličky, t. j. 24 žltých kachličiek.

b Koľko žltých kachličiek má bazén, ktorého dno má 100 kachličiek?

Na jednu stranu potrebujeme 10 kachličiek, na „obvod“ potrebujeme 4 · 10 kachličiek plus 4 rohové kachličky, t. j. 44 žltých kachličiek.

c Koľko žltých kachličiek má bazén, ktorého dolná obvodová strana má 6 žltých kachličiek?

Ak je na dolnej strane obvodu 6 kachličiek, vnútri sú 4 (situácia na obrázku), teda na obloženie bazéna potrebujeme 4 · 4 + 4 = 20 žltých kachličiek.

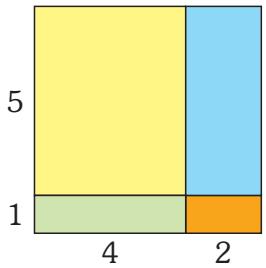
d Koľko žltých kachličiek má bazén, ktorého jedna obvodová strana má 20 žltých kachličiek?

Ak je ich 20 na jednej z obvodových strán, potom treba 2 krajné odobrať (rohy bazéna) a spolu máme 18 · 4 + 4 rohové = 76 žltých obvodových kachličiek.

A4

Štvoruholník je rozdelený na štyri menšie obdĺžniky, ktorých obsahy sa dajú ľahko vypočítať. Rozhodni, či sú číselné výrazy vyjadrujúce obsah štvoruholníka správne, a vysvetli, čo jednotlivé časti výrazu znamenajú.

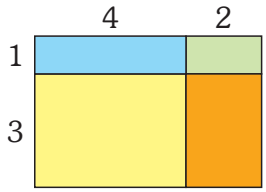
a



$(5 + 1) \cdot (4 + 2) = 20 + 10 + 4 + 2 =$
$= 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2$

Obidva výrazy sú správne. Na ľavej strane je obsah veľkého štvorca vyjadrený ako súčin dĺžok strán, na pravej ako súčet obsahov obdĺžnikov, ktoré ho tvoria.

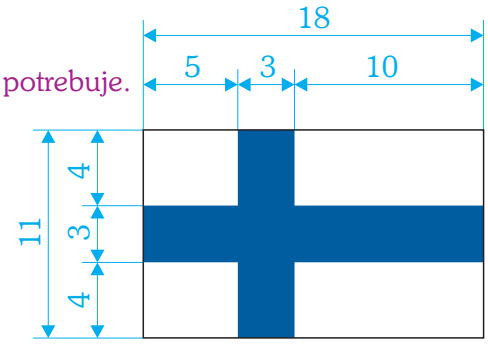
b



$1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + \cancel{3 \cdot 4} = (1 + 3) \cdot (2 + 4)$
$1 \cdot 2$

Výraz je nesprávny na ľavej strane rovnosti, lebo je tam dvakrát započítaný žltý obdĺžnik a chýba zelený.

A5 Teo a Šimon podporujú fínskych hokejistov.
Poprosili preto tetu Elvíru, aby im ušila fínsku vlajku.
Chlapci jej chceli prácu uľahčiť – napísali jej, koľko z ktorej látky potrebuje.



Teo	Šimon
biela: $2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 10$	biela: $4 \cdot (18 - 3) \cdot 2$
modrá: $2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 18$	modrá: $3 \cdot 11 + 3 \cdot 18$

a Teta Elvíra sa čudovala, ako je možné, že obaja napísali pri bielej látke niečo iné.
Kto z chlapcov má pravdu? A ako by jej to mali vysvetliť?

Obaja určili bielu plochu správne, ale iným spôsobom:
Teo sčítal obsahy dvoch menších ($5 \cdot 4$) a dvoch väčších obdĺžnikov ($4 \cdot 10$).
Šimon rozdelil vlajku na tri vodorovné pásy. Stredný (celý modrý) vynechal, ostali mu dva rovnaké bielo-modré pásy šírky 4.
Ak vynechá modrú časť, pásy majú dĺžku $18 - 3 = 15$.

b Keď Elvíra vypočítala plochu modrej látky, dostala iné číslo u Tea ako u Šimona.
Kde nastal problém? Zdôvodni svoju odpoveď a navrhni, ako problém odstrániť.

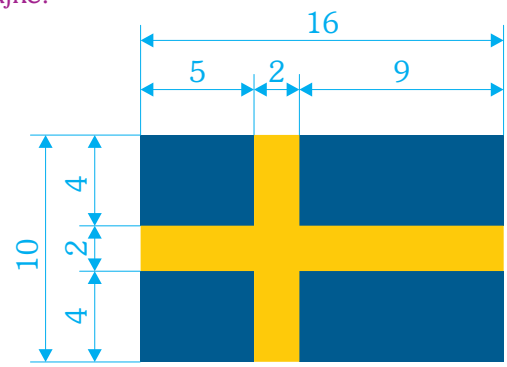
Zápis $3 \cdot 18$ (modrý vodorovný pás) je u oboch rovnaký.
Šimon k tomu pripočítal celý vertikálny modrý pás, a tak dvakrát započítal časť, kde sa pásy prekrývajú. Stačí ju teda odpočítať.
Potom hodnota Šimonovho výrazu bude $3 \cdot 11 + 3 \cdot 18 - 3 \cdot 3 = 78$,
čo je to isté ako Teova ($24 + 54 = 78$).

c V ktorých jednotkách sú pravdepodobne rozmery na obrázku? Zdôvodni svoju odpoveď.

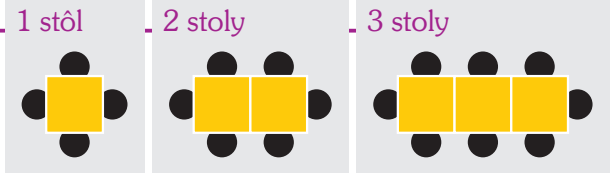
V decimetroch. Keby to bolo v centimetroch alebo v milimetroch, vlajka by bola príliš malá. Keby to bolo v metroch, bola by príliš veľká.

d Napíš číselný výraz vyjadrujúci veľkosť žltej látky na švédskej vlajke.

Napr.:
- $2 \cdot 16 + 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2$
- $16 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2$, teda $(16 + 4 + 4) \cdot 2$
- $10 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 2$, teda $(10 + 5 + 9) \cdot 2$
- $10 \cdot 16 - 2 \cdot (5 + 9) \cdot 4$



A6 V škole majú štvorcové stoly. Ak chce viacero učiteľov sedieť spolu, spájajú stoly podľa obrázka.



a Koľko učiteľov môže sedieť spolu, ak spojíme 5 stolov?

Pri 5 stoloch môže spolu sedieť 12 učiteľov.

Tu si žiaci môžu pomôcť náčrtom alebo tabuľkou.

b Koľko učiteľov môže sedieť spolu, ak spojíme 8 stolov?

Pri 8 stoloch môže spolu sedieť 18 učiteľov.

Aj tu pomôže náčrt alebo tabuľka.

c Martin, Šimon a Lujza riešili úlohu s 20 spojenými stolmi rôzne. Dokonči ich riešenia a zdôvodni, či s nimi súhlasíš.

Martin

Ak sú spojené 2 stoly, je tam 6 stoličiek.
Pri 20 spojených stoloch bude 10-krát viac stoličiek ako pri 2 stoloch, teda $6 \cdot 10 = 60$ stoličiek.

Martinovo nie je správne, lebo keby bol počet stoličiek priamo úmerný počtu stolov, tak pri 4 stoloch by bol dvojnásobok stoličiek ako pri 2 stoloch, teda $2 \cdot 6 = 12$. A 12 stoličiek je pri 5 stoloch (úloha a)).

Šimon

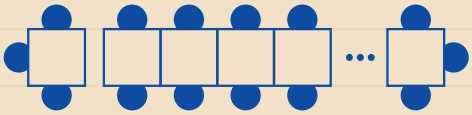
Stolov	1	2	3	4	...
Stoličiek	4	6	8	10	...

$+2 \quad +2 \quad +2$

Počet stoličiek sa stále zväčšuje o 2, preto pri 20 stoloch bude $4 + (2 + 2 + \ldots + 2) =$
$= 4 + (19 \cdot 2) = 4 + 38 = 42$ stoličiek.

Šimonovo riešenie je správne.

Lujza



Každý pridaný stôl znamená o dve stoličky navyše.
Na krajoch sú dva stoly s 3 stoličkami a vnútri zvyšné stoly – každý s dvoma stoličkami.
Pri 20 stoloch bude spolu $2 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 42$ stoličiek.

Lujzino riešenie je správne.

Cieľom úlohy je diskutovať so žiakmi o rôznych riešeniach, nájsť chybu v Martinovej úvahe a pochopiť Šimonovo i Lujzino riešenie. Tieto dve riešenia potom treba použiť v úlohe d).

d Vypočítaj koľko učiteľov by mohlo sedieť spolu, ak by v telocvični spojili 100 takýchto stolov. Použi Šimonovo riešenie aj Lujzino riešenie.

Šimon: $4 + 99 \cdot 2 = 4 + 198 = 202$ stoličiek

Lujza: $2 \cdot 3 + 98 \cdot 2 = 6 + 196 = 202$ stoličiek

A7

Napíš svoj dátum narodenia. Deň narodenia vynásob dvoma a potom desiatimi.
K výsledku pripočítaj číslo 73 a získané číslo vynásob piatimi.
Potom pripočítaj mesiac narodenia a od celkového výsledku odpočítaj číslo 365.

a Aký výsledok dostaneš?

Napr. pre dátum 20.02. dostaneme $[(20 \cdot 2) \cdot 10 + 73] \cdot 5 + 2 - 365 = 2\,002$

b Rovnaký postup použi aj pre dátum narodenia tebe blízkej osoby. Aký výsledok dostaneš?

Tak ako aj v a), výsledok bude dátum narodenia bez bodiek.

c Klára sa narodila 23. mája. Aký výsledok dostane?

2 305

d Ak niečí dátum narodenia je v tvare *d.m.*, kde *d* označuje deň narodenia a *m* mesiac narodenia, ako bude vyzerať výraz s premennými *d* a *m* opisujúci tento výpočet?

$(d \cdot 2 \cdot 10 + 73) \cdot 5 + m - 365$

e Tento trik by sme mohli použiť aj na ohúrenie známych, ktorí trik nepoznajú – mohli by sme uhádnuť ich dátum narodenia iba na základe výsledného čísla.
Teraz však výsledok triku príliš zjavne pripomína dátum narodenia. Ktorý krok v triku môžeme vynechať, aby sme stále podľa výsledku vedeli určiť dátum narodenia? Zdôvodni svoj návrh.

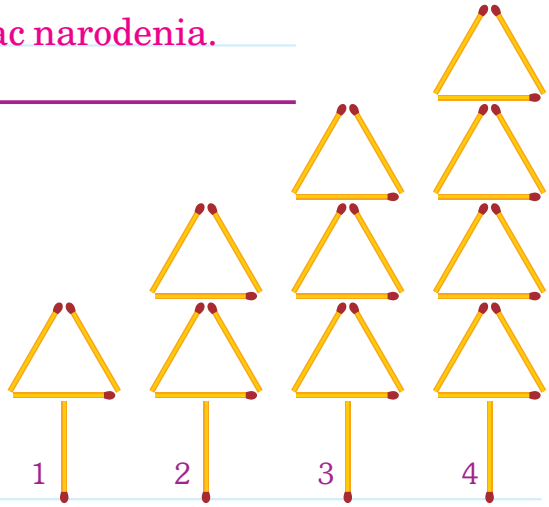
Môžeme vynechať posledný krok – odčítanie čísla 365.
Kamarát by nám povedal výsledok, od ktorého by sme si tajne odpočítali 365 a vedeli by sme hneď dátum jeho narodenia.
Napr. pre dátum 20.02. dostaneme $[(20 \cdot 2) \cdot 10 + 73] \cdot 5 + 2 = 2\,367$, $2\,367 - 365 = 2\,002$.

f Výraz zjednoduš a vysvetli, ako trik funguje.

$(d \cdot 2 \cdot 10 + 73) \cdot 5 + m - 365 = (20d + 73) \cdot 5 + m - 365 = 100d + 365 + m - 365 =$
$= 100d + m$, z čoho je vidieť, že násobenie 2, 10 a 5 je účelné, aby sme dostali 100-násobok dňa narodenia a $73 \cdot 5$ sa „vynuluje“ s 365. Zostane len 100-násobok dňa a k nemu pripočítaný mesiac narodenia.

A8

Ema skladala stromčeky zo zápaliek.



a Opíš, ako vyrobí stromček č. 5 zo stromčeka č. 4.

Na vrch stromčeka č. 4 pridá „trojuholník“ z 3 zápaliek.

b Vyplň tabuľku o počte zápaliek v jednotlivých stromčekoch.

Číslo stromčeka	1	2	3	4	5	6			
Počet zápaliek	4	7	10	13	16	19			

c Koľko zápaliek bude potrebovať na stromček číslo 10?

$1 + 10 \cdot 3 = 31$ zápaliek

d Koľko zápaliek bude potrebovať na stromček číslo 33?

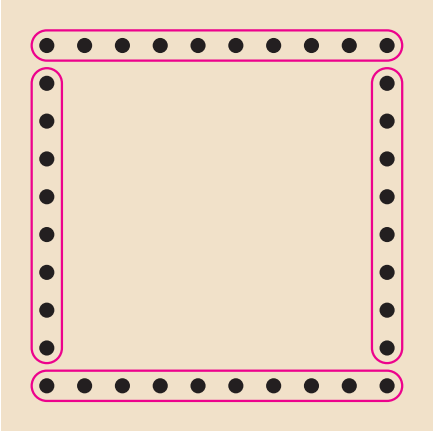
$1 + 33 \cdot 3 = 100$ zápaliek

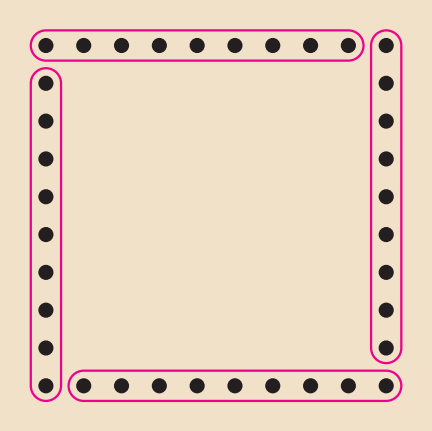
e Ema označila písmenom *s* číslo stromčeka v tejto postupnosti.
Počet zápaliek potrebných na jeho poskladanie označila písmenom *z*.
Napíš výraz, pomocou ktorého určí počet zápaliek potrebných na poskladanie stromčeka číslo *s*.

$z = 1 + s \cdot 3$

A9 Po obvode štvorca je v rovnakých rozostupoch umiestnených niekoľko bodiek.

a Nakresli tri rôzne spôsoby, ako zistiť počet všetkých bodiek bez toho, aby ich bolo treba po jednej počítať.





b Vyjadri číselným výrazom počet bodiek prislúchajúci ku každému spôsobu.

$2 \cdot 10 + 2 \cdot 8$ (= 36) | $4 \cdot 8 + 4$ (= 36) | $4 \cdot 9$ (= 36)

c Dostaneš vždy rovnaký výsledok? Prečo?

Áno, lebo stále počítame tie isté bodky, len ich zoskupujeme iným spôsobom.

d Ako by sa zmenili tvoje číselné výrazy,

– keby bol počet bodiek pozdĺž jednej strany štvorca 15?

$2 \cdot 15 + 2 \cdot 13$ | $4 \cdot 13 + 4$ | $4 \cdot 14$

– keby bol počet bodiek pozdĺž jednej strany štvorca 100?

$2 \cdot 100 + 2 \cdot 98$ | $4 \cdot 98 + 4$ | $4 \cdot 99$

– keby sme označili počet bodiek pozdĺž jednej strany štvorca písmenom b?

$2 \cdot b + 2 \cdot (b - 2)$ | $4 \cdot (b - 2) + 4$ | $4 \cdot (b - 1)$

e Keby bolo po obvode nejakého štvorca spolu 80 bodiek, koľko by ich bolo pozdĺž jeho jednej strany?

$80 - 4 = 76$ (odoberieme bodky v rohoch)

$76 : 4 = 16$ (bodky vnútri 4 strán, bez krajných)

Na jednej strane by bolo 18 bodiek (16 + 2 krajné).

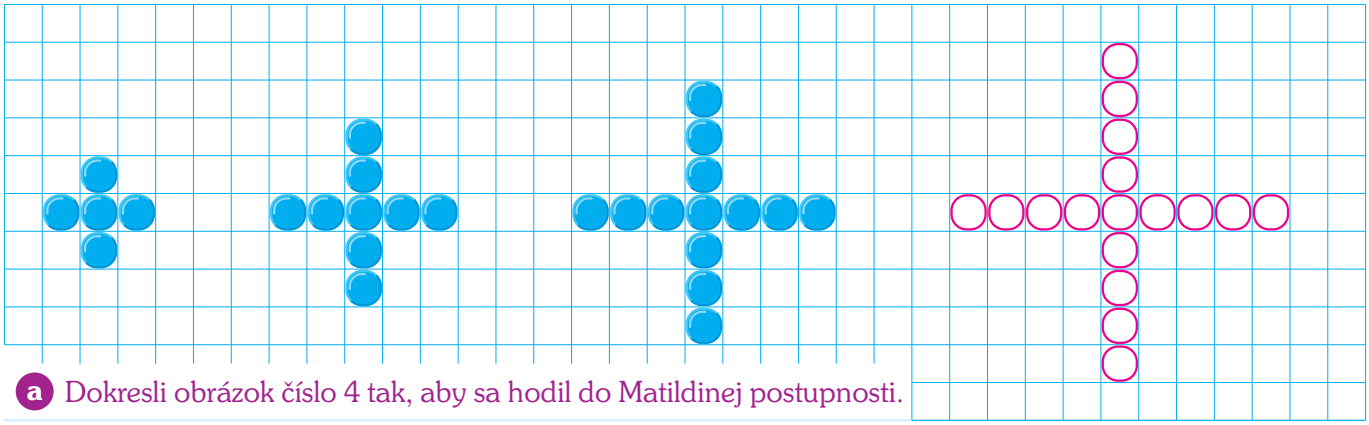
Riešenie vychádza z prostrednej stratégie v časti a). Riešenie je závislé od zvolenej stratégie.

f Existuje štvorec, okolo ktorého by bolo spolu 85 bodiek? Zdôvodni svoju odpoveď.

Nie, lebo počet bodiek musí byť deliteľný číslom 4.

Máme 4 rohy a 4 strany a na každej strane je rovnaký počet bodiek.

A10 Matilda si zo zvyšných kamienkov z diamantového maľovania vyskladala postupnosť troch obrázkov.



a Dokresli obrázok číslo 4 tak, aby sa hodil do Matildinej postupnosti.

b Vysvetli, ako Matildina postupnosť rastie.

Každé zo 4 ramien je v nasledujúcom obrázku o 1 kamienok dlhšie.

c Matilda chcela vedieť, či bude mať dosť kamienkov aj na obrázok číslo 10. Poprosila teda svojich bratov, aby jej pomohli s výpočtom. Čí postup sa ti zdá lepší a prečo?

Ondrej

Číslo obrázka	1	2	3	4	...
Počet kamienkov	5	9	13	17	...
		+ 4	+ 4	+ 4	

Počet kamienkov sa stále zvyšuje o 4, stačí teda k 5 kamienkom z prvého obrázka pripočítať 4 kamienky 9-krát.

Potrebuješ $5 + 4 \cdot 9 = 5 + 36 = 41$ kamienkov.

Erik

Každý tvoj obrázok má štyri ramená a jeden fixný kamienok v strede. Ramená majú takú dĺžku, ako je číslo obrázka.

Na obrázok číslo 10 budeš potrebovať $4 \cdot 10 + 1 = 41$ kamienkov.

Žiaci porovnajú postupy, oba sú správne.

d Bratia jej napísali aj vzorec, ktorým nájde počet kamienkov pre ľubovoľný obrázok číslo n. Vysvetli, čo znamenajú jednotlivé písmená a čísla v ich vzorcoch.

Ondrej:

$k = 5 + (n - 1) \cdot 4$

5 ..... počet kamienkov v obrázku 1

$(n - 1) \cdot 4$ .... pridáme $(n - 1)$-krát po 4 kamienky

Erik:

$k = 4 \cdot n + 1$

$4n$ .... 4 ramená po n kamienkov

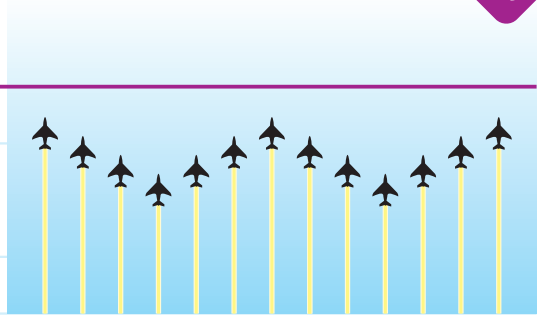
1 ..... jeden kamienok v strede

e Existuje v Matildinej postupnosti obrázok, ktorý obsahuje 101 kamienkov? Ako to vieš?

Áno, lebo ak si odmyslíme stredný kamienok, zostaneme nám 100 kamienkov. Tie sú rozdelené do 4 rovnako dlhých ramien s dĺžkou 100 : 4 = 25. Toľko kamienkov má teda obrázok číslo 25.

A11

Počas leteckej šou letí letka lietadiel vo W-formácii.



a Opíš, ako sa zväčšuje počet lietadiel vo W-formácii.

Každé zo štyroch ramien W-formácie má o 1 lietadlo viac ako v predchádzajúcej formácii.

b Doplň tabuľku.

Číslo W-formácie	1	2	3	4	5	6					
Počet lietadiel	5	9	13	17	21	25					

c Koľko lietadiel by bolo v W-formácii číslo 10?

$25 + 4 + 4 + 4 + 4 = 25 + 16 = 41$

alebo $4 \cdot 10 + 1 = 41$

Žiaci môžu použiť rôzne stratégie, napr. z tabuľky zistia, že sa počet lietadiel stále zväčšuje o 4. Môžu teda začať 6. formáciou a k nej štyrikrát pripočítať po 4 lietadlá. Alebo si uvedomia, že každá formácia má tvar písmena W, pozostáva zo 4 „ramien“ a v každom je toľko lietadiel, aké je číslo formácie, plus jedno hlavné lietadlo v strede.

d Koľko lietadiel by bolo vo W-formácii číslo 25?

$5 + 24 \cdot 4 = 5 + 96 = 101$

alebo $4 \cdot 25 + 1 = 101$

e Napíš výraz, ktorý určuje počet lietadiel l vo W-formácii číslo n. Vysvetli, ako ho dostaneš.

$l = 5 + 4 \cdot (n-1)$
5 lietadiel v 1. formácii, potom pridávame 4 lietadlá, ale len $(n - 1)$-krát

$l = 1 + 4 \cdot n$
1 hlavné lietadlo v strede a 4 ramená po n lietadiel

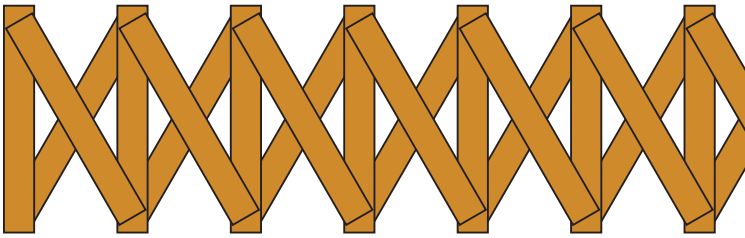
Žiaci môžu prísť aj s inými návrhmi, po úprave by to však malo byť $l = 4 \cdot n + 1$.

f Žiaci diskutovali, či existuje W-formácia, v ktorej by bolo 75 lietadiel. S kým súhlasíš a prečo?

Milan i Julka majú pravdu. Milanovo riešenie je formálnejšie, ale aj Julkino je správne.

So žiakmi môžeme diskutovať, ktoré riešenie je efektívnejšie. Napr. čo ak by sme mali zistiť, či existuje formácia s 321 lietadlami? Tu by už Julkina stratégia bola príliš zdĺhavá.

A12 Slančíkovci chcú premaľovať plot na chalupe. Patrik a Jasmína sa ponúkli, že časť plota natrú. Chceli ale najprv vedieť, koľko dostanú zaplatené. Pán Slančík povedal: „Záleží na tom, akú dĺžku plota natriete. Za jednu latku vám dám 0,70 eura.“



Preštuduj si Patrikov i Jasmínin postup, ako chceli určiť počet latiek pre ľubovoľnú dĺžku plota.

dĺžka 1

dĺžka 2

dĺžka 3

Patrik

$d_1 = 2 + 2 = 2 \cdot 1 + (1 + 1) = 4$

$d_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 2 \cdot 2 + (2 + 1) = 7$

$d_3 = 2 \cdot 3 + 4 = 2 \cdot 3 + (3 + 1) = 10$

Plot vieme vždy rozdeliť na niekoľko rovnakých úsekov. V strede je stále kríž z dvoch latiek, po krajoch kríža sú vertikálne latky. Tých je vždy o 1 viac ako dĺžka plota. Pre ľubovoľnú dĺžku n bude n krížov, teda $2 \cdot n$ latiek a po krajoch krížov o 1 latku viac ako dĺžka plota, teda $n + 1$.

$d_n = 2 \cdot n + (n + 1)$

Jasmína

$d_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

$d_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$d_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

Každý úsek vždy pozostáva akoby z rímskeho čísla IX (deväť), teda z 3 latiek a potom buď nasleduje ďalší „Riman“ alebo ukončenie vertikálnou latkou. Pre ľubovoľnú dĺžku n bude n rímskych deviatok, teda $3 \cdot n$ latiek a na koniec ešte jedna latka.

$d_n = 3 \cdot n + 1$

a Čí postup je správny? Zdôvodni svoju odpoveď.

Oba postupy sú správne. Obaja započítali všetky latky a každú len raz. Rozdiel bol v spôsobe, akým plot „rozobrali“ na menšie, opakujúce sa kusy.

b Koľko latiek bude v plote dĺžky 19? Počítaj oboma spôsobmi.

Patrikov spôsob:

$d_{19} = 2 \cdot 19 + (19 + 1)$

$d_{19} = 38 + 20 = 58$ latiek

Jasmínin spôsob:

$d_{19} = 3 \cdot 19 + 1$

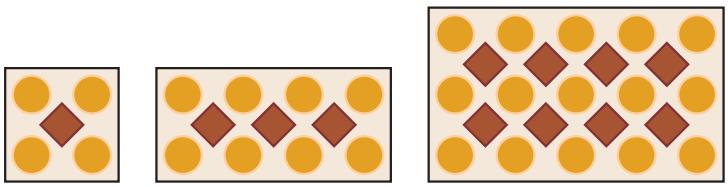
$d_{19} = 57 + 1 = 58$ latiek

c Koľko eur dostane Patrik, ak namaľuje plot dĺžky 12, a koľko Jasmína, ak namaľuje plot dĺžky 14?

Patrik dostane: $d_{12} = 3 \cdot 12 + 1 = 36 + 1 = 37$ latiek $37 \cdot 0{,}70 = 25{,}90$ eura

Jasmína dostane: $d_{14} = 3 \cdot 14 + 1 = 42 + 1 = 43$ latiek $43 \cdot 0{,}70 = 30{,}10$ eura

A13 V bonboniére sú dva druhy cukríkov – okrúhle dukátiky a štvorcové karamelky. Rozmery krabice určujú, koľko je v bonboniére radov a stĺpcov dukátikov.



2×2 2×4 3×5

a Vymysli spôsob, ako určíš, koľko karameliek je v ľubovoľnej takejto bonboniére. Zdôvodni, prečo je tvoj spôsob správny.

Karamelky sú vždy v riadku medzi dukátikmi.
Pri 2 radoch dukátikov máme len 1 riadok s karamelkami,
pri 3 radoch dukátikov len 2 rady karameliek...
Preto je počet riadkov karameliek vždy o 1 menší
ako počet radov dukátikov (prvý rozmer krabice). To isté platí pre stĺpce.
Preto pri rozmere krabice 3 × 5 je karameliek 2 · 4 = 8.
Ak by bol rozmer krabice napr. 5 × 7, karameliek by bolo 4 · 6 = 24.
A ak sú všetky bonboniéry navrhnuté podľa tohto princípu,
tak náš postup na výpočet platí pre všetky rozmery (viď obrázok).

V diskusii porovnajte spôsoby žiakov.

b Koľko cukríkov spolu je v bonboniére s rozmermi 5×6?

Dukátikov ..... 5 · 6 = 30
Karameliek .... 4 · 5 = 20
Spolu ..... 20 + 30 = 50 Spolu je v takejto bonboniére 50 cukríkov.

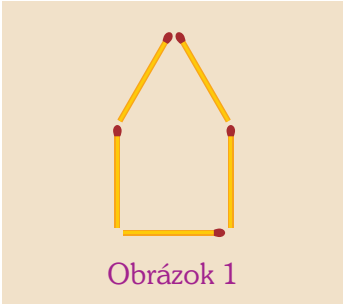
c Keby bol rozmer krabice $m \times n$, koľko by tam bolo dukátikov a koľko karameliek?

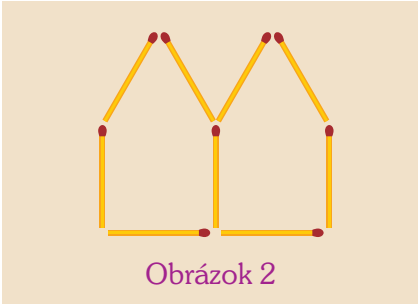
Dukátikov: $m \times n$
Karameliek: $(m - 1) \times (n - 1)$

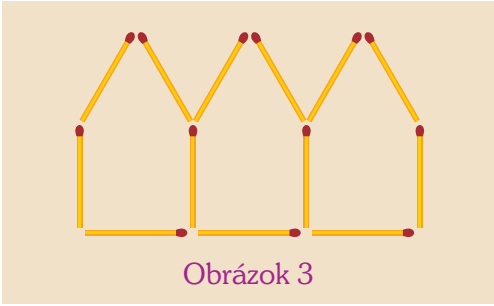
d Dorotka tvrdí, že mali doma presne takúto bonboniéru a bolo v nej 12 karameliek. Aké mohla mať bonboniéra rozmery? Zdôvodni svoju odpoveď.

Číslo 12 zapíšeme ako súčin 2 čísel,
lebo karamelky sú usporiadané v radoch a stĺpcoch.
Existujú len 3 možnosti pre počet riadkov a stĺpcov karameliek;
rozmery krabice sú od počtu riadkov a stĺpcov karameliek o 1 väčšie.
12 = 1 · 12 rozmery krabice: 2 × 13 alebo 13 × 2
12 = 2 · 6 rozmery krabice: 3 × 7 alebo 7 × 3
12 = 3 · 4 rozmery krabice: 4 × 5 alebo 5 × 4

A14 Žiaci mali určiť, koľko zápaliek potrebujú na poskladanie radového domu v n-tom obrázku.
Laura napísala výraz: $z = 5 + (n - 1) \cdot 4$
Majo napísal: $z = 4 \cdot n + 1$
Nela im na to povedala: „Niekto z vás to nemá dobre, veď máte rôzne odpovede!“


Obrázok 1


Obrázok 2

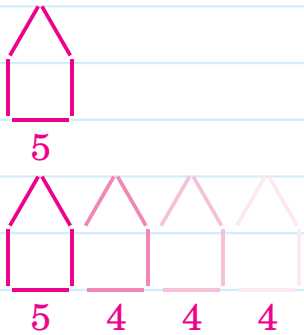

Obrázok 3

a Má Nela pravdu? Vysvetli to.

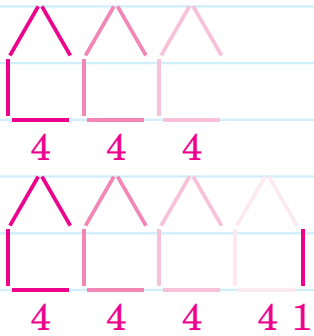
Nemá pravdu, lebo ak Laurin výraz upravíme, dostaneme taký istý výraz, ako napísal Majo.
$z = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$

b Skús vysvetliť, ako svoj výraz dostala Laura a ako Majo.
Čo znamenajú čísla a premenné v ich výrazoch v súvislosti s obrázkami?

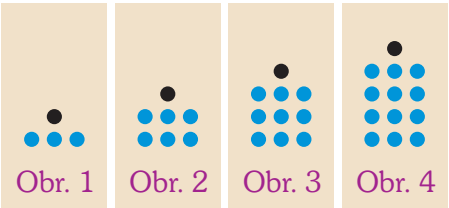
Laura najprv použije 5 zápaliek na prvý domček a potom ďalšie domčeky pripája k prvému. Na každý ďalší potrebuje už len 4 zápalky. „Pripájacích“ domčekov je o 1 menej ako číslo obrázka n, preto potrebuje spolu $5 + 4 \cdot (n - 1)$ zápaliek.



Majo vidí, že obrázok číslo n pozostáva z n domčekov bez pravej steny. Na každý taký neúplný domček potrebuje 4 zápalky, na n takých domčekov $4 \cdot n$ zápaliek. Posledný domček v rade musí uzatvoriť 1 zápalkou, spolu preto potrebuje $4 \cdot n + 1$ zápaliek.



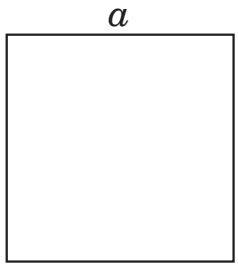
A15 Napíš výraz vyjadrujúci počet bodiek b v obrázku číslo n v postupnosti na obrázku.
Vysvetli, čo znamenajú jednotlivé písmená a čísla v tvojom výraze.



$b = 1 + 3 \cdot n$
Modré bodky tvoria obdĺžnik, ktorého šírka je stále 3 a výška sa mení v závislosti od čísla obrázka n, preto je modrých bodiek $3 \cdot n$.
Číslo 1 predstavuje čiernu bodku navrchu.

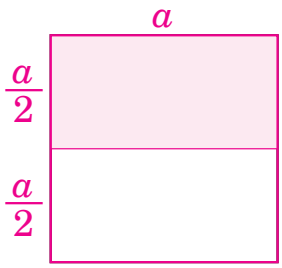
A16

Daný je štvorec so stranou dĺžky a. Vysvetli, ako treba štvorec rozdeliť zvislými alebo vodorovnými čiarami na zhodné časti tak, aby jedna jeho časť mala obsah:



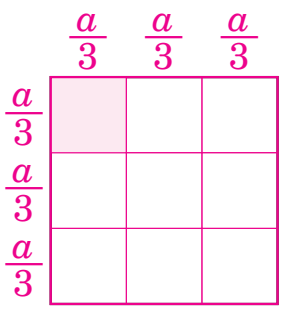
a $S = a \cdot \frac{a}{2}$

Obsah je vyjadrený ako súčin dvoch rôznych dĺžok, preto útvar bude mať tvar obdĺžnika a každý činiteľ bude predstavovať dĺžku jednej jeho strany. Dĺžka a zodpovedá napr. vodorovnému rozmeru štvorca, $a/2$ je potom polovica z výšky štvorca.



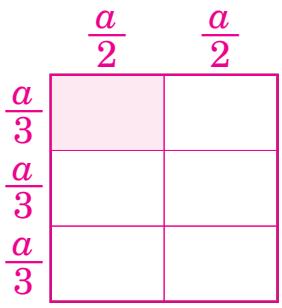
b $S = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}$

Obsah je vyjadrený ako súčin dvoch rovnakých dĺžok, preto útvar bude mať tvar štvorca, ktorého strana je $a/3$. Oba rozmery pôvodného štvorca treba rozdeliť na tri rovnaké časti – vznikne tak 9 zhodných častí a každá z nich má požadovaný obsah.



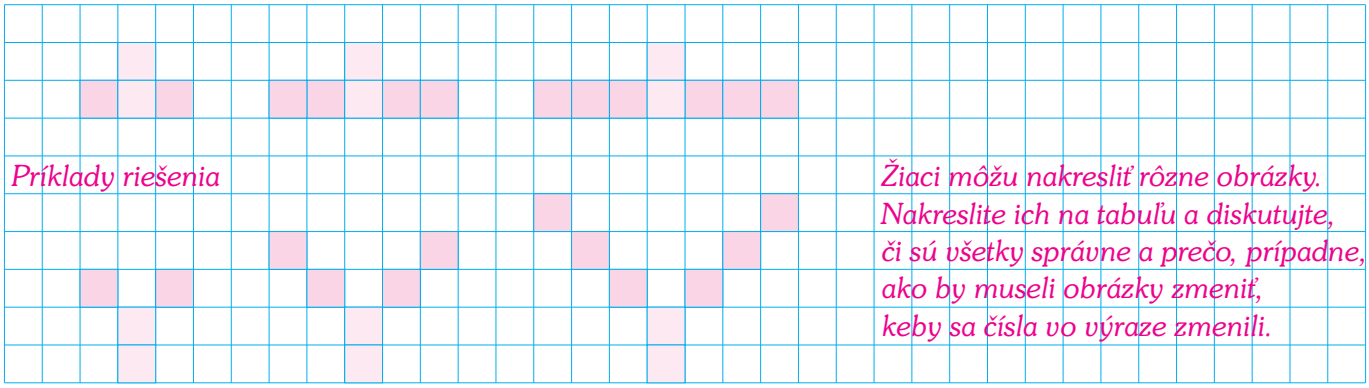
c $S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}$

Činitele sú opäť rozdielne, čiže hľadaný útvar je obdĺžnik s rozmermi $a/2$ a $a/3$. „Výšku“ štvorca teda rozdelíme na tretiny a jeho šírku na polovicu (alebo naopak). Vznikne tak 6 rovnakých častí, každá s požadovaným obsahom.



A17

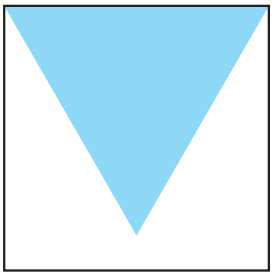
Nakresli postupnosť prvých troch obrázkov, ktoré zodpovedajú výrazu $s = 2n + 2$, kde s je počet vyfarbených štvorčekov v obrázku číslo n.



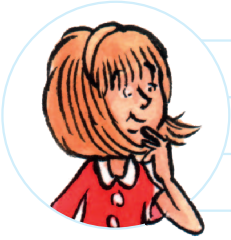
Príklady riešenia

Žiaci môžu nakresliť rôzne obrázky. Nakreslite ich na tabuľu a diskutujte, či sú všetky správne a prečo, prípadne, ako by museli obrázky zmeniť, keby sa čísla vo výraze zmenili.

4 Obvod a obsah trojuholníka



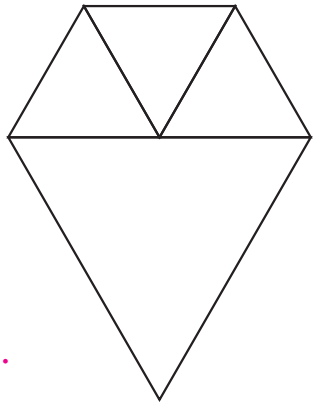
A1 Vnútri štvorca je rovnostranný trojuholník. Obvod trojuholníka je 51 cm.
Peter a Milica hľadajú obvod štvorca.
Dopíš chýbajúci text v ich riešeniach tak, aby riešenie mali obaja správne.



Keďže je trojuholník rovnostranný,
jeho obvod vypočítame ako $o = 3 \cdot a$,
kde a je strana trojuholníka i štvorca. Preto $a =$ 51 : 3 = 17 cm.
Obvod štvorca vypočítame ako $o =$ $4 \cdot a$, teda $o = 4 \cdot 17 =$ 68 cm.

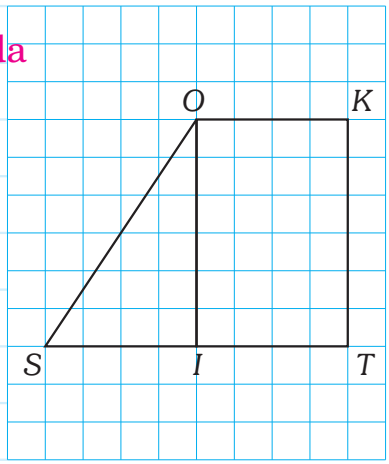
Každá strana tohto trojuholníka je rovnako dlhá
ako každá strana štvorca.
Štvorec má ale o jednu stranu viac ako trojuholník.
Preto stačí k obvodu trojuholníka pripočítať ešte
dĺžku jednej jeho strany, čo je jedna tretina obvodu trojuholníka.
Dostaneme preto $51 + \frac{1}{3} \cdot 51 =$ 51 + 17 = 68 cm.

A2 Útvar na obrázku pozostáva z rovnostranných trojuholníkov –
z troch malých a z jedného veľkého. Urč obvod tohto útvaru,
ak vieš, že strana malého trojuholníka meria 5,5 cm.



Keďže všetky trojuholníky sú rovnostranné,
strana väčšieho trojuholníka musí byť
dvojnásobok strany menšieho, teda meria 11 cm.
Potom obvod útvaru je $2 \cdot 11 + 3 \cdot 5{,}5 = 22 + 16{,}5 = 38{,}5$ cm.

A3 Bez akýchkoľvek výpočtov urč, ktorý z útvarov *SIO* a *ITKO* má väčší obvod. Svoju odpoveď zdôvodni.



Trojuholník a obdĺžnik majú jednu stranu spoločnú, teda
rovnako dlhú. „Spodná“ strana je rovnako dlhá u oboch.
Stačí teda rozhodnúť, či strana *SO* je dlhšia
ako zvyšné dve strany obdĺžnika. Podľa trojuholníkovej nerovnosti vieme, že $|SO| < |SI| + |IO|$.
Zároveň platí, že $|SI| = |IT| = |OK|$ a $|IO| = |TK|$.
Preto $|SO| < |OK| + |TK|$.
Preto má obdĺžnik väčší obvod ako trojuholník.

A4

Rovnoramenný trojuholník má základňu dĺžky 4 cm a ramená neznámej dĺžky m.
Rozhodni, či obvod tohto trojuholníka vyjadrili Tina a Tomáš správne. Zdôvodni svoju odpoveď.

Tina

$o = 4 + m + m$

$o = 4 + 2m$

Tinin postup je správny – keďže trojuholník je rovnoramenný, ramená majú spolu dĺžku $2m$.

Tomáš

$o = 4 + m + m$

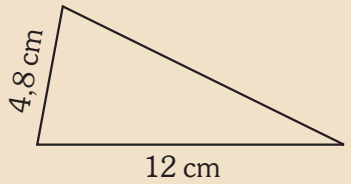
$o = 4 + 1m + 1m$

$o = 6m$

Tomášov postup je síce správny, ale výsledok nie – pomiešal čísla a premenné.

A5

Juro vypočítal obsah trojuholníka na obrázku. Je jeho riešenie správne? Zdôvodni svoju odpoveď.



$12 \cdot 4{,}8 = 57{,}6$

$57{,}6 : 2 = 28{,}8$

Obsah trojuholníka je 28,8 cm^2.

Riešenie nie je správne, lebo stranu musí vynásobiť výškou na túto stranu a výšku nepozná. Jeho postup funguje iba v pravouhlom trojuholníku.

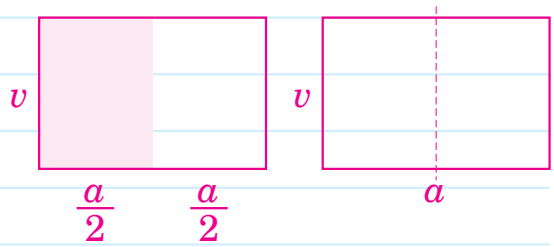
A6

Katka hovorí: „Ak chceš vypočítať obsah rovnoramenného trojuholníka, musíš určiť polovicu základne a tú vynásobiť výškou.“
Sofia hovorí: „Najprv musíš vynásobiť základňu a výšku a až potom to celé vydeliť dvoma.“

a Čí návod je správny? Prečo?

Oba návody sú správne, pretože $\frac{a}{2} \cdot v$ je to isté ako $\frac{a \cdot v}{2}$, keďže $\frac{a}{2} \cdot v = \frac{a}{2} \cdot \frac{v}{1} = \frac{a \cdot v}{2}$.

Dá sa to zdôvodniť aj geometricky:
Ak máme obdĺžnik so stranami a a v, vynásobením $\frac{a}{2} \cdot v$ dostaneme obsah polovice tohto obdĺžnika.



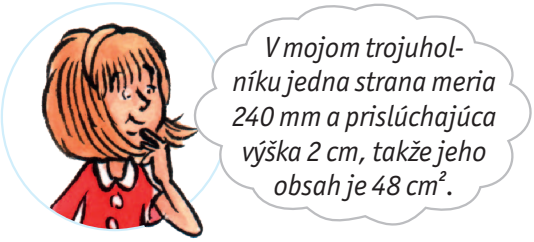
V druhom prípade vynásobíme $a \cdot v$, čo je obsah celého obdĺžnika.
Výsledok vydelíme dvoma, čím taktiež dostaneme obsah polovice obdĺžnika.

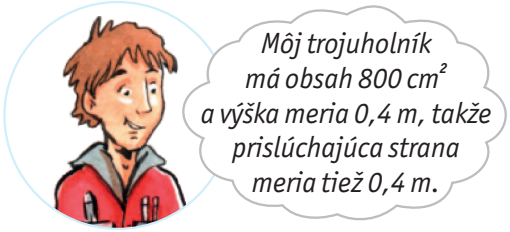
b Aký ďalší správny návod by ešte mohli dievčatá vysloviť?

Základňu stačí vynásobiť polovicou výšky, t. j. $a \cdot \frac{v}{2}$.

A7

Tina a Tomáš rysovali trojuholníky. Kto z nich má pravdu? Zdôvodni svoju odpoveď.





$a = 240\ \text{mm} = 24\ \text{cm}$

$v_a = 2\ \text{cm}$

$S = (a \cdot v_a) : 2 = (24 \cdot 2) : 2 = 24\ \text{cm}^2$

$S = 800\ \text{cm}^2$

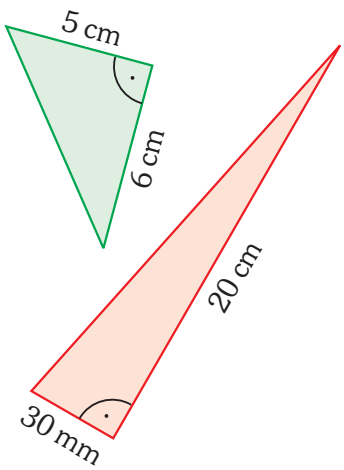
$v_a = 0{,}4\ \text{m} = 40\ \text{cm}$

$a = 2S : v_a = 1\,600 : 40 = 40\ \text{cm} = 0{,}4\ \text{m}$

Tomáš má pravdu. Tina nie, lebo zabudla obsah vydeliť číslom 2.

A8

Zuzka porovnávala obsahy červeného a zeleného trojuholníka. Povedala: „Obsah červeného trojuholníka je štyrikrát väčší ako obsah zeleného, lebo jedna jeho strana je štyrikrát väčšia ako strana zeleného trojuholníka.“ Má pravdu? Zdôvodni svoj názor.



Nemá pravdu,
lebo obsah červeného trojuholníka
je $(3 \cdot 20) : 2 = 30\ \text{cm}^2$
a obsah zeleného trojuholníka je $(5 \cdot 6) : 2 = 15\ \text{cm}^2$.

A9

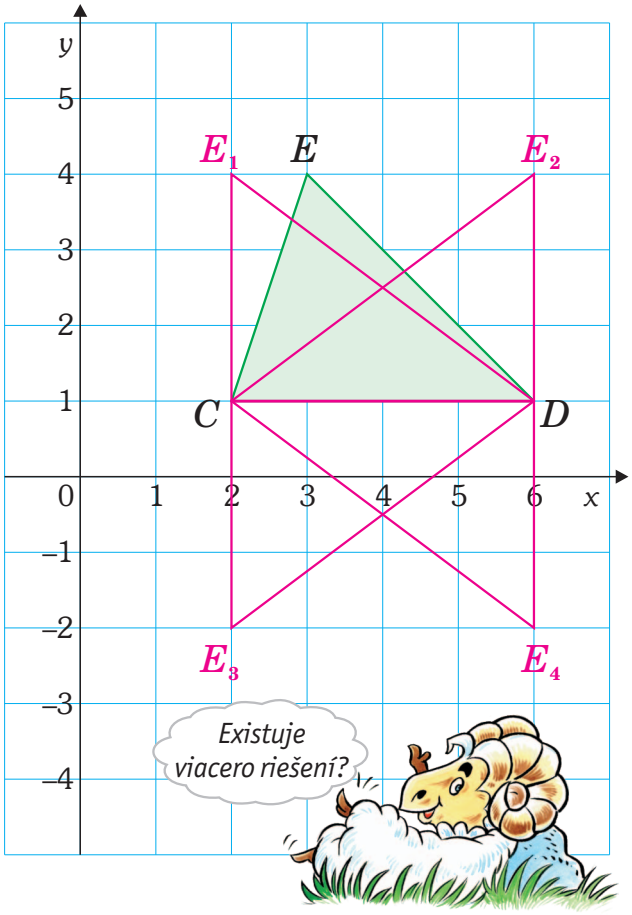
Kam musíme premiestniť bod *E*, aby vznikol trojuholník s rovnakým obsahom a

a bol pravouhlý?

Aby sa nezmenil obsah trojuholníka, musíme zachovať vzdialenosť bodu *E* od priamky *CD*, teda jeho výšku. Preto sa *y*-ová súradnica bodu *E* nemôže zmeniť. Zároveň musí mať trojuholník pravý uhol – buď pri vrchole *C*, alebo pri *D*. Vyhovujú teda body [2, 4] a [6, 4].
Ďalšou možnosťou je zobraziť tieto body súmerne podľa priamky *CD*, čo sú body [2, –2] a [6, –2].

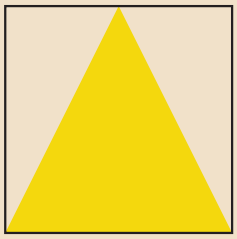
b bol rovnoramenný so základňou *CD*?

Trojuholník bude rovnoramenný, ak bod *E* bude mať rovnakú vzdialenosť od bodu *C* aj *D*. To nastane, ak bude ležať na osi úsečky *CD*. Aby sa obsah nezmenil, musí od úsečky *CD* ostať rovnako ďaleko.
Preto musí mať súradnice [4, 4] alebo [4, –2].

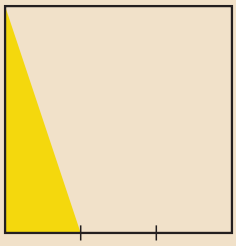


A10 Soňa nebola celý týždeň v škole pre chorobu.
Od spolužiačky Majky si odpisovala poznámky z matematiky a bol tam aj takýto príklad:

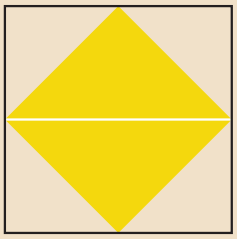
Zapíšte vzťah na výpočet obsahu trojuholníka vyznačeného vo štvorci so stranou dĺžky a.



$$S = \frac{a \cdot a}{2}$$



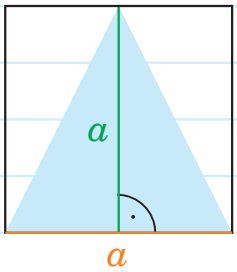
$$S = \frac{\frac{a}{3} \cdot a}{2}$$



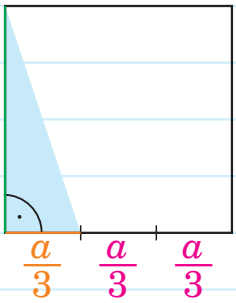
$$S = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot 2$$

Soňa vôbec nerozumie, akým spôsobom Majka na tieto vzorce prišla. Vysvetli jej to.

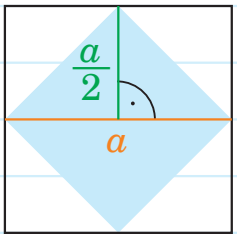
Obsah trojuholníka vypočítame tak, že vynásobíme jeho stranu s prislúchajúcou výškou a výsledok vydelíme dvoma (trojuholník má polovičný obsah rovnobežníka s rovnakými rozmermi dvoch jeho strán). Na obrázku teda treba hľadať strany a prislúchajúce výšky, ktorých veľkosti poznáme.



$$S = \frac{a \cdot a}{2}$$



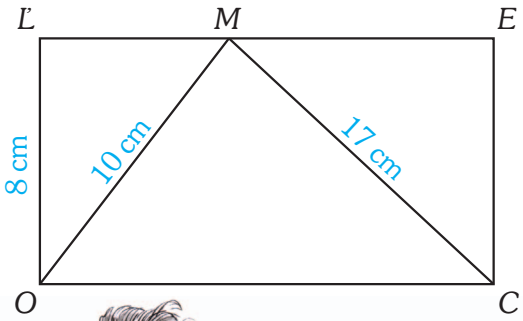
$$S = \frac{\frac{a}{3} \cdot a}{2}$$



$$S = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot 2$$

2 rovnaké trojuholníky

A11 Trojuholník MOC, ktorého obvod je 48 cm, je umiestnený do obdĺžnika $OCEĽ$. Oliver tvrdí, že obsah trojuholníka MOC je určite viac ako 100 cm². Má pravdu? Ako to vieš?



Najprv treba určiť dĺžku úsečky OC z obvodu trojuholníka MOC:

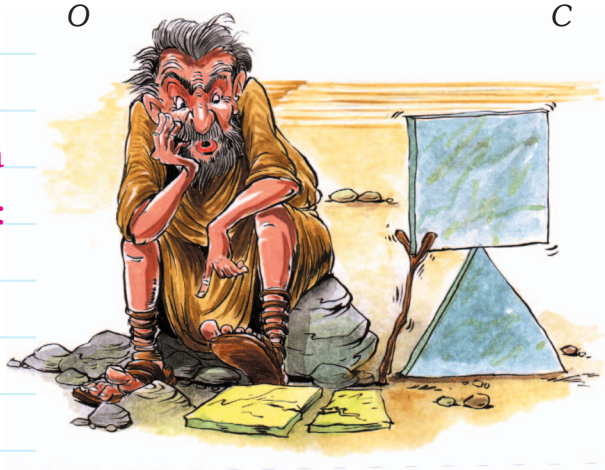
$$|OC| = 48 - |OM| - |MC|$$

$$|OC| = 48 - 10 - 17 = 21 \text{ cm}$$

Teraz už poznáme dĺžku základne trojuholníka aj príslušnú výšku, vieme vypočítať jeho obsah:

$$S = \frac{|OC| \cdot |OĽ|}{2} = \frac{21 \cdot 8}{2} = 84 \text{ cm}^2$$

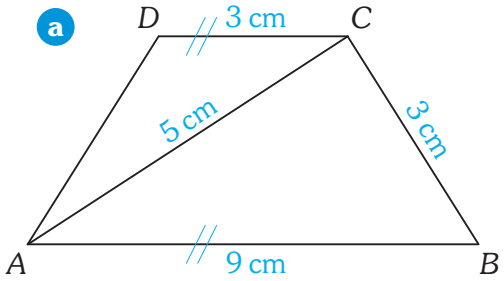
$84 < 100$, preto Oliver nemá pravdu.



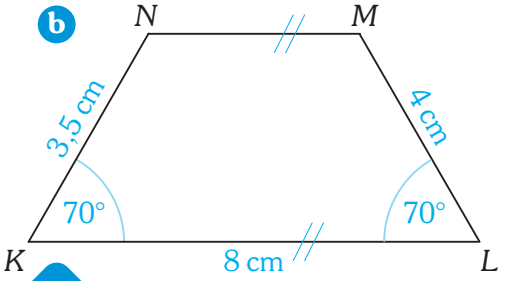
5 Lichobežník

A1 V náčrtku je jedna dĺžka zadaná **nesprávne**. Nájdi ju, zdôvodni, prečo je nesprávne a navrhni opravu.

a



b

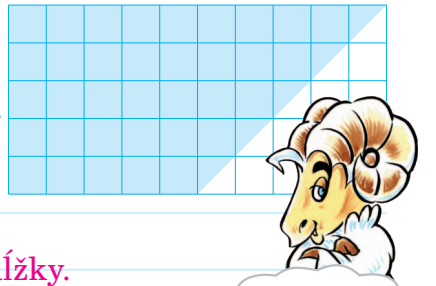


Chybne zadaná je niektorá zo strán trojuholníka *ABC*, pretože 5 + 3 < 9 a je teda porušená trojuholníková nerovnosť. Opraviť možno dĺžku ľubovoľnej strany trojuholníka *ABC*, len treba overiť trojuholníkovú nerovnosť pre všetky dvojice strán.

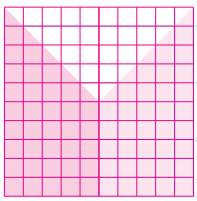
Nesprávne zadaná je | *KN* | alebo | *LM* |, lebo lichobežník má pri základni *KL* dva zhodné uhly a je teda rovnoramenný. Preto jeho ramená musia mať rovnakú dĺžku. Oprava: 1. možnosť: | *KN* | = 4 cm

2. možnosť: | *LM* | = 3,5 cm

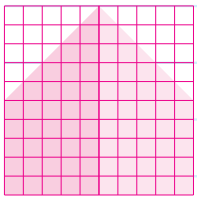
A2 Rišo si vystrihol dva lichobežníky rovnakých rozmerov, jeden z nich je na obrázku vyznačený modro. Chce si vystrihnúť ešte jeden trojuholník alebo štvoruholník tak, aby vedel zo všetkých troch útvarov zložiť štvorec. Koľkými rôznymi spôsobmi môže k sebe priložiť dva lichobežníky tak, aby sa dali tretím útvarom doplniť na štvorec? Vysvetli svoj postup.



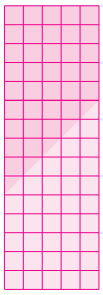
Rišo má tri rôzne možnosti priloženia lichobežníkov.
Snažíme sa vytvoriť čo najviac pravých uhlov a zabezpečiť zhodné dĺžky.



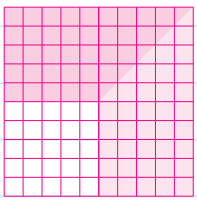
1.
Lichobežníky k sebe priložíme kratšími základňami. Zabezpečíme tak 2 pravé uhly a tri zhodné strany. Štvorec vznikne doplnením trojuholníka.



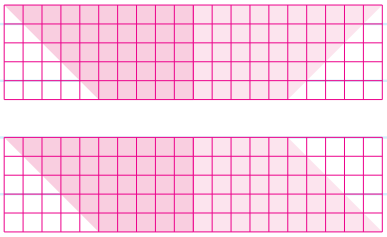
2.
Lichobežníky k sebe priložíme dlhšími základňami. Vznikne „domček“. Jedným trojuholníkom ani štvoruholníkom ho na štvorec nevieme doplniť.



3.
Lichobežníky k sebe priložíme dlhšími ramenami tak, aby vznikol obdĺžnik. Ten sa vždy dá doplniť na štvorec, stačí doplniť vhodný obdĺžnik.



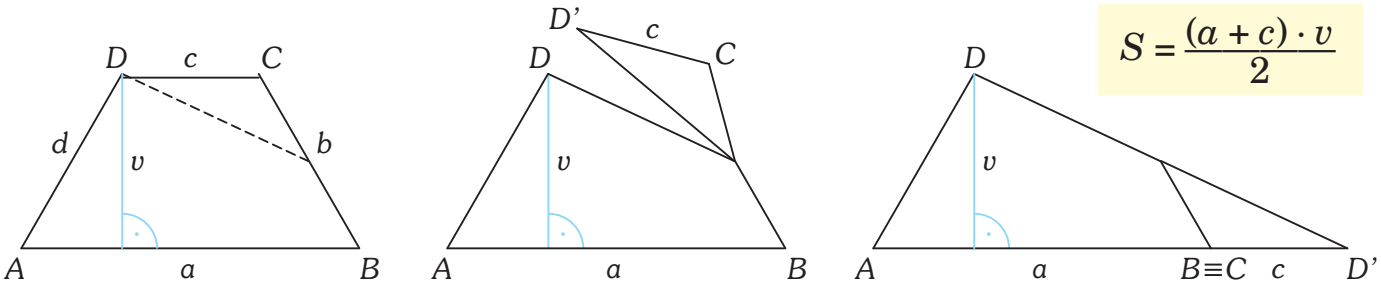
4.
Lichobežníky k sebe priložíme dlhšími ramenami tak, aby vzniklo symetrické „L“ s pravými uhlami a zhodnými dĺžkami. Štvorec vznikne doplnením menšieho štvorca.



5., 6.
Lichobežníky k sebe priložíme kratším ramenom. Vznikne kosodĺžnik alebo rovnoramenný lichobežník, jedným útvarom ich nevieme doplniť na štvorec.

A3

Simona našla na internete iné odvodenie vzorca na výpočet obsahu lichobežníka než to, ktoré sa učili v škole. Snažila sa pochopiť, čo obrázok ukazuje a ako sa k vzorcu dopracovať. Preskúmaj obrázok aj ty. Opíš, čo sa s lichobežníkom deje, a ako možno k vzorcu dospieť.

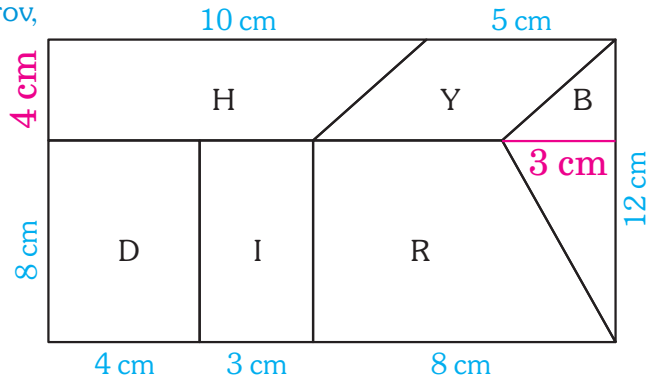


$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Z lichobežníka odstrihli trojuholník – strihali priamo od vrcholu D do stredu strany b. Trojuholník potom otočili a prilepili k zvyšnej polovici strany b. Keďže základne sú v lichobežníku rovnobežné, preklopená strana c bude pokračovať presne rovnakým smerom ako strana a.
Dostaneme tak veľký trojuholník so základňou dĺžky $(a + c)$.
Výška v je v trojuholníku rovnaká ako v lichobežníku.
Obsah trojuholníka je teda $S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$, čo je vlastne obsah lichobežníka, pretože sme žiadnu plochu neodstránili, ani nepridali – iba sme ju premiestnili.

A4

Dano rozdelil obdĺžnik na obrázku na 6 rôznych útvarov, vypočítal ich obsahy a tie nazval H, Y, B, R, I, D.



a Má pravdu, keď tvrdí, že $H + B = R$? Zdôvodni svoju odpoveď.

Vypočítame obsahy lichobežníkov (H, R) a trojuholníka (B).

$H = \frac{(7 + 10) \cdot 4}{2} = 17 \cdot 2 = 34\ \text{cm}^2$

$R = \frac{(5 + 8) \cdot 8}{2} = 13 \cdot 4 = 52\ \text{cm}^2$

$B = \frac{12 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 3 = 18\ \text{cm}^2$ $\quad H + B = 34 + 18 = 52\ \text{cm}^2 = R$

Dano má pravdu.

b Doplň prirodzené čísla do Danovej rovnosti tak, aby bola pravdivá. $2 \cdot I + 1 \cdot D = 4 \cdot Y$

Najprv vypočítame obsahy obdĺžnikov (I, D) a rovnobežníka (Y).

$I = 3 \cdot 8 = 24\ \text{cm}^2$ $\quad D = 4 \cdot 8 = 32\ \text{cm}^2$ $\quad Y = 5 \cdot 4 = 20\ \text{cm}^2$

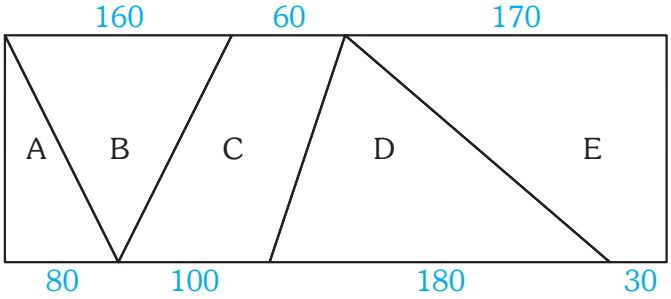
Keďže Y je násobkom čísla 10, potrebujeme nájsť také násobky I a D, ktorých súčet sa bude tiež končiť na nulu. Hodnotu v modrom rámiku potom vždy vieme doplniť tak, aby rovnosť platila.

Riešení je viacero, napr. $2I + 1D = 4Y$, $1I + 3D = 6Y$, $4I + 2D = 8Y$…

Ak je riešením nejaká trojica (napr. 2, 1, 4), tak aj každý jej násobok je riešením (napr. 4, 2, 8).

A5

a Ktoré dva z útvarov A, B, C, D, E na obrázku majú rovnaký obsah? Zdôvodni svoju odpoveď.



Označme výšku veľkého obdĺžnika v.

Potom

$$S_A = \frac{80 \cdot v}{2} = 40v \qquad S_B = \frac{160 \cdot v}{2} = 80v$$

$$S_C = \frac{(100 + 60) \cdot v}{2} = 80v \qquad S_D = \frac{180 \cdot v}{2} = 90v \qquad S_E = \frac{(30 + 170) \cdot v}{2} = 100v$$

Rovnaký obsah majú trojuholník B a lichobežník C.

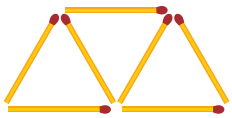
Predpokladáme, že žiaci budú úlohu riešiť tak, že určia obsah jednotlivých útvarov a potom výsledky porovnajú. Dôležité je uvedomiť si, že všetky útvary majú rovnakú výšku. Za výšku si môžu zvoliť aj konkrétne číslo.

b Samo povedal: „*Nemusím nič počítať! Stačí, keď si napíšem dĺžku základne každého trojuholníka, k tomu súčty dĺžok základní každého lichobežníka a tieto čísla porovnám.*“ Má pravdu? Prečo?

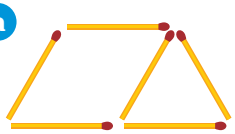
Má pravdu, lebo výška je vo všetkých útvaroch rovnaká a ich obsah závisí len od základne, resp. od súčtu základní.

A6

Z rovnako dlhých zápaliek sme vytvorili útvar na obrázku. Keď z tohto útvaru odoberiem jednu alebo dve vnútorné zápalky, dostanem buď rovnobežník a trojuholník, alebo lichobežník. Zisti, ktoré tvrdenia platia pre jednotlivé prípady.



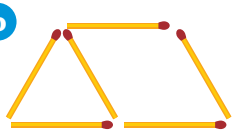
a



Vzniknutý rovnobežník je kosodĺžnik. **áno – nie**

Pretože strany majú rovnakú dĺžku – je to kosoštvorec.

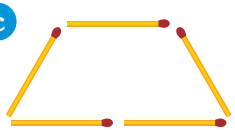
b



Obsah vzniknutého rovnobežníka je dvojnásobkom obsahu vzniknutého trojuholníka. **áno – nie**

Pretože rovnobežník bol zložený z dvoch takýchto (rovnostranných) trojuholníkov.

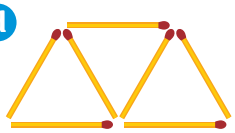
c



Vzniknutý lichobežník je rovnoramenný. **áno – nie**

Pretože ramená majú rovnakú dĺžku (jedna zápalka).

d



Všetky vzniknuté trojuholníky sú navzájom zhodné. **áno – nie**

Pretože to vyplýva napr. z vety *sss*.