I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

Argumentácia v matematike

pre 7. ročník ZŠ
a 2. ročník GOŠ

2. zošit

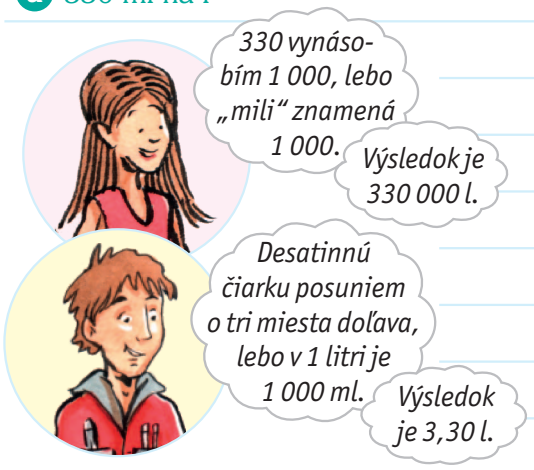
Projekt **MaTeK**

Orbis**P**ictus**I**stropolitana

6 Objem a povrch kvádra a kocky

A1 Aneta a Peter premieňali jednotky objemu. Kto má podľa teba správne riešenie? Ak je niečie riešenie nesprávne, vysvetli, prečo je nesprávne a aká by mala byť správna odpoveď.

a 330 ml na l



Ani jedno riešenie nie je správne. Aneta nemala násobiť 1 000, ale deliť 1 000. 1 l = 1 000 ml, tu máme len 330 ml, teda riešenie musí byť menšie ako 1 liter. Peter síce uvažoval správne, ale výsledok je nesprávny, lebo desatinnú čiarku neposunul o 3 miesta, ale len o 2. Správna odpoveď je 0,33 l.

b 15,8 dm^3 na mm^3

Ani jedno riešenie nie je správne. Desatinnú čiarku treba posunúť dvakrát o tri miesta (resp. 15,8 vynásobiť 1 000 a to dvakrát). Prvý posun (násobenie) je premena dm^3 na cm^3 (keďže $1\ dm^3 = 1\ dm \cdot 1\ dm \cdot 1\ dm = 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1\ 000\ cm^3$) a druhý posun je premena cm^3 na mm^3 (lebo $1\ cm^3 = 1\ cm \cdot 1\ cm \cdot 1\ cm = 10\ mm \cdot 10\ mm \cdot 10\ mm = 1\ 000\ mm^3$). Správna odpoveď je 15 800 000 mm^3.

c 400 dm^3 na hl

Anetino riešenie nie je správne, lebo nemala násobiť, ale deliť 100. To je to isté, ako keď 400 centov premieňame na eurá (1 euro = 100 centov). 400 centov sú 4 eurá a nie 40 000. Petrovo riešenie je správne, lebo $1\ dm^3 = 1\ l$ a $1\ hl = 100\ l$.

A2 Sýtený nápoj predávajú v balení so štyrmi veľkými fľašami, každú s objemom 1,5 l, alebo ako balenie 24 plechoviek, v ktorom každá plechovka obsahuje 330 ml tohto nápoja.

a V ktorom balení je viac nápoja, v balení s fľašami alebo s plechovkami?

Fľaše ..... $4 \cdot 1{,}5 = 6$ l

Plech. .... $24 \cdot 330 = 7\,920$ ml $= 7{,}92$ l

Viac nápoja je v balení s plechovkami, lebo spolu je tam až 7,92 l nápoja, pričom vo fľašiach je len 6 l.

b Balenie s fľašami stojí 7,49 € a balenie s plechovkami 33,59 €. Čo sa viac oplatí kúpiť?

Vypočítam cenu nápoja za 1 liter. Fľaše ..... $7{,}49 : 6 \doteq 1{,}25$ €

Plech. .... $33{,}59 : 7{,}92 \doteq 4{,}24$ €

Viac sa oplatí balenie s fľašami, lebo cena za 1 liter nápoja je oveľa menšia ako v prípade plechoviek.

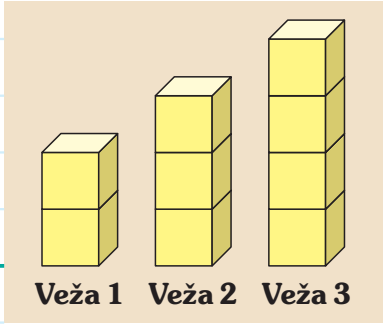
Žiaci môžu úlohu riešiť aj hrubým odhadom.

c Koľko eur by sme dostali späť, keby sme vrátili 24 zálohovaných plechoviek?

$24 \cdot 0{,}15 = 3{,}60$ €

Ak je záloha za 1 plechovku 15 centov, dostali by sme naspäť 3,60 eura.

Diskutujte so žiakmi, prečo je potrebné zálohovať fľaše a plechovky.



A3 Iva skladala z kociek s dĺžkou hrany 1 dm veže.

a Aký objem majú veže číslo 1, 2 a 3?

Objem jednej kocky je $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ dm^3, preto objemy veží sú:

$V_1 = 2$ dm^3 $V_2 = 3$ dm^3 $V_3 = 4$ dm^3

b Aký objem budú mať veže z 10 a zo 128 kociek?

Objem veže závisí od počtu kociek vo veži, preto 10 dm^3, resp. 128 dm^3.

c Aké je číslo veže, ktorá má objem 250 dm^3? Odpoveď zdôvodni.

1 kocka ..... 1 dm^3

250 dm^3 .... 250 kociek

Veže 1, 2 aj 3 majú o 1 kocku viac, ako je ich poradové číslo, preto veža s 250 kockami má číslo 249.

d Koľkonásobne sa zväčší objem 10-kockovej veže, ak dĺžku hrany každej kocky zväčšíme o polovicu?

Nová dĺžka hrany kocky bude 1,5 dm, preto nový objem bude

$V = 10 \cdot (1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5) = 10 \cdot 3{,}375$ dm^3.

Objem sa zväčší 3,375-krát.

e Iveta tvrdí, že ak pôvodnú dĺžku hrany každej kocky zmenšíme o polovicu, objem veže číslo 99 bude 12,5-krát menší ako pôvodne. Má pravdu? Zdôvodni svoju odpoveď.

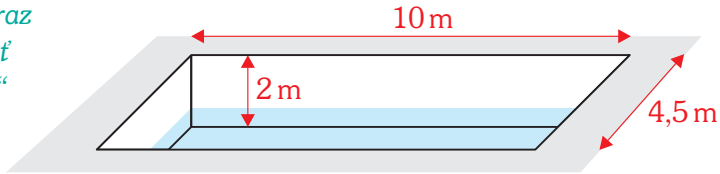
Nemá, lebo objem pôvodnej veže 99 bol 100 dm^3 (lebo má 100 kociek) a objem zmenšenej veže by bol: $V = 100 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = 100 \cdot \frac{1}{8} = \frac{100}{8} = 12{,}5$ dm^3.

Objem zmenšenej veže nie je 12,5-krát menší, ale 8-krát menší.

A4 Jasmína a Patrik napúšťali bazén teplou vodou. Keď bol bazén napustený približne do jednej pätiny, Patrik povedal: *„Už to prepni na studenú vodu, už sme minuli viac ako 50 000 litrov teplej vody, nieže skrachujeme! Zvyšok naplníme studenou, veď sa to samo ohreje.“*

Jasmína odvetila: *„Ale kdeže, v bazéne je teraz maximálne 20 000 litrov. To budeme čakať veľmi dlho, kým sa v tom bude dať kúpať!“*

Kto z nich lepšie lepšie odhadol množstvo teplej vody? Zdôvodni odpoveď.

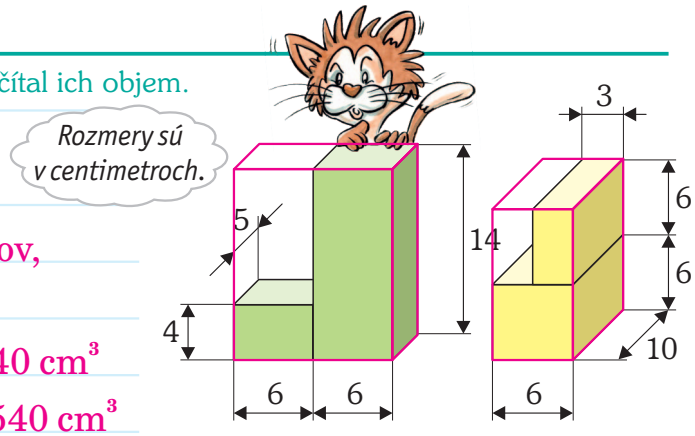


Objem bazéna je $V = 2 \cdot 10 \cdot 4{,}5 = 90\ m^3 = 90\ 000\ dm^3 = 90\ 000$ litrov.

Je napustený do jednej pätiny, je v ňom teda 90 000 : 5 = 18 000 litrov teplej vody.

Množstvo vody v bazéne lepšie odhadla Jasmína.

A5 Dano postavil z kvádrov dve rôzne telesá a vypočítal ich objem.



a Dano tvrdí, že zelené teleso je objemovo väčšie ako žlté. Má pravdu? Zdôvodni svoj názor.

Obe telesá pozostávajú z dvoch kvádrov, ktorých objem treba vypočítať.

$V_z = 6 \cdot 5 \cdot 14 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 420 + 120 = 540\ cm^3$

$V_ž = 6 \cdot 10 \cdot 6 + 3 \cdot 10 \cdot 6 = 360 + 180 = 540\ cm^3$

Telesá majú rovnaký objem, Dano pravdu nemá.

b Otec sa pozrel na Danov výpočet: *„Hmm, to si počítal nejako komplikovane. Skús nájsť iný spôsob.“* Opíš dva rôzne spôsoby na výpočet objemu týchto telies.

1. Objem určíme ako súčet objemov dvoch menších kvádrov, z ktorých telesá pozostávajú. (Riešenie uvedené v a) časti úlohy.)
2. Objem určíme ako rozdiel objemu veľkého kvádra a kvádra, ktorý chýba (ktorý „vyrežeme“).

A6 Koľko existuje hranolov s objemom 72 dm^3, ktorých dĺžky hrán v decimetroch sú celé čísla a podstava je štvorec? Vysvetli svoj postup.

Objem hranola so štvorcovou podstavou vypočítame ako $V = a \cdot a \cdot v$.

Hrany majú byť celočíselné, preto stačí overiť, ktoré prirodzené čísla môžu byť rozmermi podstavy (súčin $a \cdot a$ musí deliť 72 bez zvyšku) a výšku dopočítame.

$1 \cdot 1 = 1$, $v = 72$	$6 \cdot 6 = 36$, $v = 2$
$2 \cdot 2 = 4$, $v = 18$	$7 \cdot 7 = 49$, 49 nedelí 72
$3 \cdot 3 = 9$, $v = 8$	$8 \cdot 8 = 64$, 64 nedelí 72
$4 \cdot 4 = 16$, 16 nedelí 72	$9 \cdot 9 = 81$, $81 > 72$ a všetky ďalšie čísla už tiež
$5 \cdot 5 = 25$, 25 nedelí 72	nebudú vyhovovať, lebo prekročia daný objem.

Spolu existujú 4 hranoly, ktoré spĺňajú uvedené podmienky.

A7 Rozhodni, či nasledujúce tvrdenia platia vždy, niekedy alebo nikdy.
Zdôvodni výber svojej odpovede a vymysli konkrétny vzorový príklad, ktorý dokáže tvoju odpoveď.

a Vzájomnou výmenou všetkých troch dĺžok hrán kvádra sa zmení aj jeho objem.

Pravdivé:
vždy – niekedy – nikdy

Lebo objem kvádra vypočítame $V = a \cdot b \cdot c$ a pri násobení nezáleží na poradí činiteľov.

Príklad: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm => $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ cm^3

$a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm => $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ cm^3

Vzájomnou výmenou všetkých troch dĺžok hrán kvádra nikdy nedôjde k zmene jeho objemu, pretože výsledok súčinu sa nezmení. Vzájomná výmena dĺžok v praxi znamená, že kváder sa len otočí.

b Zmenou dĺžky jednej hrany kvádra sa zmení aj jeho objem.

Pravdivé:
vždy – niekedy – nikdy

Lebo objem kvádra vypočítame $V = a \cdot b \cdot c$. Ak zmeníme dĺžku ktorejkoľvek z hrán, zmení sa aj súčin.

Príklad: To je, akoby sme každý deň počas troch týždňov vyhrali po 5 eur. Keby sme dennú výhru zväčšili/zmenšili, zmenila by sa aj celková suma výhry (zdôvodnenie analógiou).

c Zmenou dĺžky dvoch hrán kvádra sa zmení aj jeho objem.

Pravdivé:
vždy – niekedy – nikdy

Lebo výsledok súčinu (a teda objem) sa mení v závislosti od zmenených činiteľov.

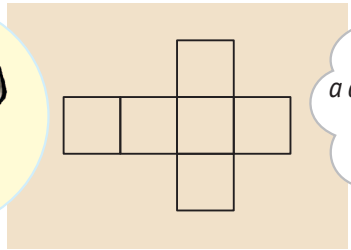
Príklad: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm => $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ cm^3.

Ak však napr. $a' = 2$, $b' = 6$ a $c' = c = 5$, potom $V = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ cm^3. Ak $a' = 6$, $b' = 7$ a $c' = c = 5$, potom $V = 6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$ cm^3.

Preto tvrdenie platí len niekedy.

V diskusii porovnajte vzorové príklady žiakov.

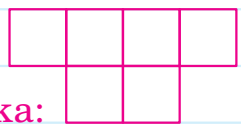
A8 Žiaci mali zistiť počet všetkých rôznych sietí kocky. Kto má pravdu? Zdôvodni odpoveď.



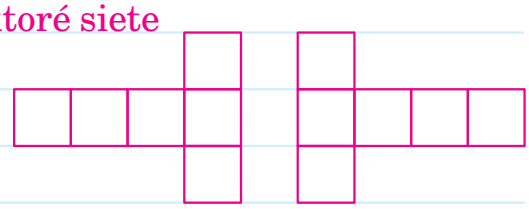
Tvar siete závisí len od umiestnenia horného a dolného štvorca. Horný môže byť na 4 pozíciách, dolný tiež na 4, preto všetkých možností je 4 . 4.

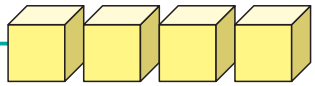
Sietí kocky je teda 16.

Ani jeden nemá pravdu. Alex nemá pravdu, lebo napr. z tejto siete so 6 štvorčekmi sa nedá postaviť kocka:

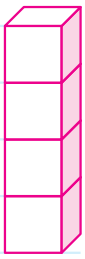


Barborin postup obsahuje niektoré siete dvakrát, napr.:

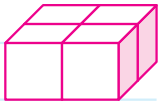




A9 Lenka má štyri rovnaké kocky s hranou dlhou 5 cm.
Má ich k sebe prilepiť všetky tak, aby vznikol kváder s čo najmenším povrchom.
Ako bude vyzerať táto stavba? Zdôvodni odpoveď.

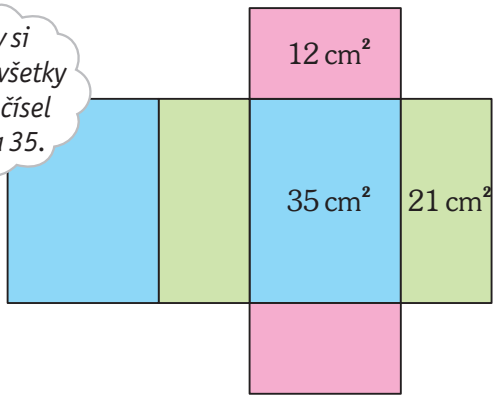


Zo 4 rovnakých kociek sa dajú postaviť iba 2 rôzne kvádre.
Ak postavíme 4 kocky na seba, vznikne veža.
Každá kocka má 6 stien, t. j. $6 \cdot 4 = 24$ stien. Z nich 3 dvojice stien budú zlepené, čiže povrch tvorí $24 - 6 = 18$ stien. Každá stena je štvorec so stranou 5 cm, teda povrch kvádra bude $S = 18 \cdot 5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 450\ \text{cm}^2$.
Ak vytvoríme s rozmermi $10 \times 10 \times 5$ cm, zlepené budú až 4 dvojice stien.
Povrch takéhoto kvádra bude tvoriť $24 - 8 = 16$ stien a teda dostaneme menší povrch $S = 16 \cdot 5\text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 400\ \text{cm}^2$.



A10 Žiaci mali za úlohu na výkres formátu A4 narysovať sieť kvádra, vystrihnúť ju a kváder poskladať.
Učiteľ im však namiesto rozmerov kvádra zadal len obsahy troch jeho stien a dodal, že rozmery sú v centimetroch a celočíselné.

Ella



a Napíš všetky delitele týchto čísel.

12: 1, 2, 3, 4, 6, 12
21: 1, 3, 7, 21
35: 1, 5, 7, 35

b Prečo Ella začala deliteľmi obsahov jednotlivých strán? Vysvetli to.

Lebo iba delitele môžu byť dĺžkami hrán kvádra, keďže:
1. dĺžky hrán sú celočíselné,
2. obsah je ich súčinom.

c Nakoniec si Ella do zošita napísala: *„Úloha nemá riešenie. Obsah ružovej steny musí byť 15 cm².“*
Má Ella pravdu? Odpoveď zdôvodni.

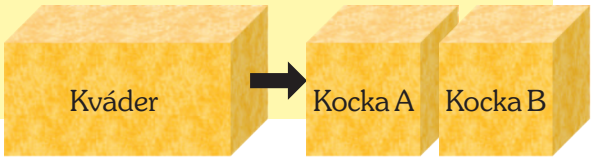
Ella má pravdu.
Modrá a zelená stena majú jednu hranu spoločnú a medzi deliteľmi 35 a 21 sú rovnaké len čísla 1 a 7.
Keby spoločná hrana bola dĺžky 1 cm, zvyšné by museli byť 21 a 35, preto by obsah ružovej steny musel byť $21 \cdot 35 = 735\ \text{cm}^2$.
Taká sieť by sa dokonca nezmestila ani na výkres veľkosti A4.
Ak je spoločná hrana dĺžky 7 cm, potom rozmery ružovej steny musia byť 5 a 3 cm, teda jej obsah musí byť $15\ \text{cm}^2$.

A11 Žiaci dostali od učiteľky písomné zadanie.

Kváder sa dá rozrezať na dve kocky. Urobte to a bez merania rozhodnite, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé alebo nepravdivé.

1. Kocky *A* a *B* majú rovnaký objem.

2. Súčet povrchov kociek *A* a *B* je rovnaký ako povrch kvádra.



a Posúď riešenia niektorých žiakov.

Adam: „Ak nemôžeme zmerať rozmery kociek, tak nevieme nič o ich objemoch. Tvrdenie 1 sa nedá overiť ani vyvrátiť.“

Barbora: „Dva predmety sú vždy viac ako jeden, takže kocky *A* a *B* musia mať väčší povrch ako pôvodný kváder. Tvrdenie 2 je nepravdivé.“

Charlotte: „Rozdelením kvádra na dve časti sme nič nepridali ani neubrali, takže povrch kvádra musí byť rovnaký ako povrchy kociek *A* a *B* dokopy. Tvrdenie 2 je pravdivé.“

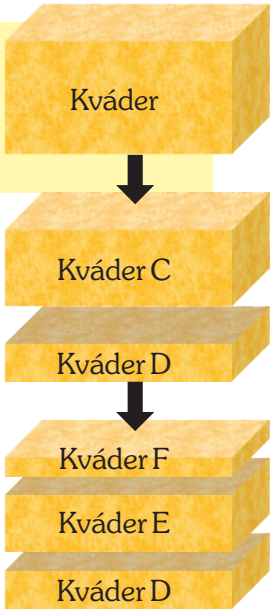
Ak priložením kociek *A* a *B* vedľa seba vznikne kváder, tak ich rozmery sú rovnaké. Nepotrebujeme ich merať, ako tvrdí Adam. Keďže majú rovnakú dĺžku hrany, tak aj ich objem bude rovnaký. Tvrdenie 1 je pravdivé, Adamovo riešenie je teda nesprávne.

Ak kváder rozdelíme na kocku *A* a *B*, tak nám vzniknú dve nové steny – nimi sa kocky *A* a *B* dotýkajú, tieto steny nie sú stenami pôvodného kvádra. Všetky ostatné steny ostávajú zachované. Povrch kvádra je preto menší (o tieto dve steny) ako súčet povrchov kociek *A* a *B*. Tvrdenie 2 nie je pravdivé, teda Charlotte nemá pravdu. Barbora síce odpovedala správne, ale jej zdôvodnenie správne nie je.

b Na ďalšej hodine žiaci dostali nové pokyny. Posúď riešenia niektorých žiakov.

Kváder rozrežte vo vodorovnom smere tak, aby vznikli dva navzájom rôzne kvádre *C* a *D*. Potom väčší z nich (kváder *C*) rozrežte rovnakým spôsobom na dva navzájom rôzne kvádre *E* a *F*. Bez merania rozhodnite, či je tvrdenie 3 pravdivé.

3. Súčet povrchov kvádrov *D*, *E* a *F* je väčší ako súčet povrchov kvádrov *C* a *D*.



Danica: „Už na obrázku jasne vidieť, že kvádre *D*, *E*, *F* sú menšie, takže keď sčítame ich menšie povrchy, vyjde nám menší výsledok. Tvrdenie 3 je nepravdivé.“

Edo: „Všetky spomínané kvádre vznikli z pôvodného kvádra, nič sme tam nepridali, musí to vyjsť vždy rovnako. Tvrdenie 3 neplatí.“

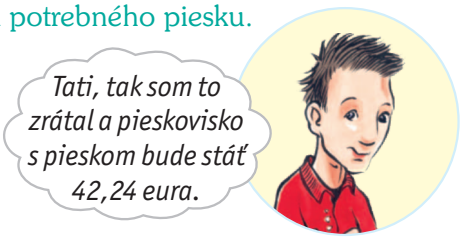
Félix: „Je jedno, či kváder budeme krájať na kocky alebo kvádre, povrch bude väčší. Tvrdenie 3 platí.“

Danica správne poznamenala, že kvádre sú menšie, lebo rozrezaním pôvodného kvádra sa zmenšuje výška (šírka ani dĺžka sa nemení). Pri prvom reze na kvádre *C* a *D* vzniknú dve nové steny – styčné steny kvádrov *C* a *D*, pri druhom reze na kvádre *E* a *F* pribudnú ďalšie dve nové steny – styčné steny kvádrov *F* a *E*. Po prvom reze sa teda súčet povrchov zväčšil o dve rovnaké steny, pri druhom reze sa súčet povrchov zväčšil o štyri rovnaké steny v porovnaní s povrchom pôvodného kvádra. Danica teda nemá pravdu a tvrdenie 3 je pravdivé.

Edo si (asi) mýli povrch a objem – celkový objem ostáva naozaj nezmenený, povrch sa však mení v závislosti od pribúdajúcich stien. Jeho argumentácia je chybná.

Félix má pravdu – nezáleží na tvare telesa, ktoré vznikne rozrezaním kvádra, vždy vzniknú nové styčné plochy a tie súčet povrchov zväčšia.

A12 Pán Kováč chcel deťom do záhrady kúpiť pieskovisko. Poprosil najstaršieho syna Huga, aby pozrel ponuku na eshope a zistil cenu pieskoviska a potrebného piesku.



PIESKOVISKO 37,99 €

Rozmery a hmotnosť	
Dĺžka	120 cm
Šírka	120 cm
Výška	28 cm
Hmotnosť	18,1 kg

4,25 €

a Pánu Kováčovi sa to zdalo veľmi málo. Akým spôsobom Hugo asi vypočítal výslednú sumu?

Hugo spočítal cenu jedného rámu pieskoviska (37,99 eura) a jedného vrecka piesku (4,25 eura).

b Pána Kováča zaujímalo, ako Hugo zistil, koľko vriec piesku budú potrebovať. S akými hmotnosťami pracoval Hugo?

V škole sme sa učili, že treba počítať s rovnakými jednotkami. Tak som si porovnal hmotnosti...

Hugo asi porovnal hmotnosť rámu pieskoviska (18,1 kg) s hmotnosťou vrecka piesku (25 kg) a usúdil, že stačí kúpiť jedno vrecko.

c Je Hugovo riešenie správne? Koľko vriec piesku budú potrebovať? Vysvetli to.

Na hmotnosti rámu pieskoviska nezáleží, piesok treba nasypať dovnútra pieskoviska. Zaujíma nás preto množstvo piesku, ktoré vyplní jeho vnútro, t. j. objem pieskoviska.

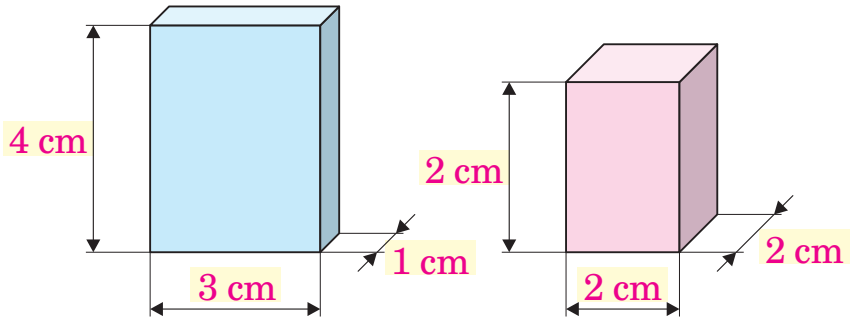
$V = a \cdot b \cdot c = 120\ \text{cm} \cdot 120\ \text{cm} \cdot 28\ \text{cm} = 403\,200\ \text{cm}^3 = 403{,}2\ \text{dm}^3 = 403{,}2\ \text{l}$

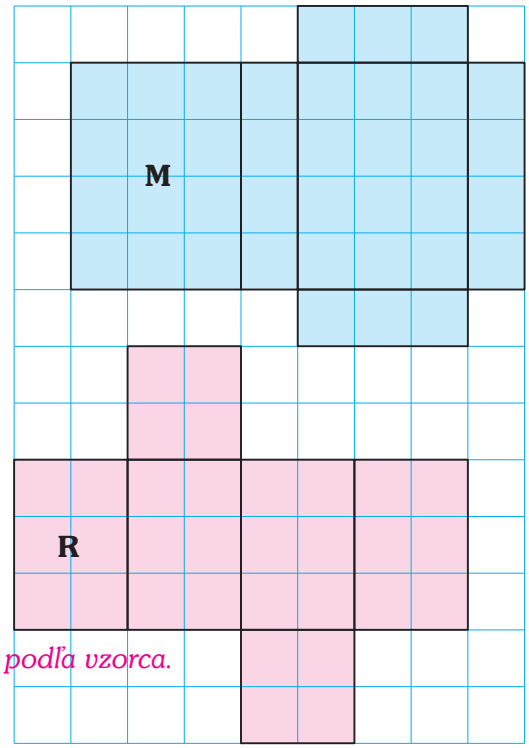
Na vreci je napísané, že obsahuje približne 20 l piesku. Tu treba využiť spomenuté „rovnaké jednotky“.

Počet vriec ... 403,2 : 20 = 20,16

Bude im stačiť 20 vriec, pieskovisko nemusí byť naplnené úplne zarovno s okrajom.

A13 Doplň chýbajúce rozmery kvádrov *M* a *R* v centimetroch, ak poznáš ich siete. Štvorček siete má rozmery 1 × 1 cm.





a Urč povrchy kvádrov.

$S_M = 38\ \text{cm}^2$

$S_R = 32\ \text{cm}^2$

b Vypočítaj objemy kvádrov.

$V_M = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12\ \text{cm}^2$

$V_R = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12\ \text{cm}^2$

Žiaci môžu v úlohe a) spočítať štvorčeky v sieti alebo určiť povrchy podľa vzorca.

c Doplň tvrdenia tak, aby boli pravdivé.

Ak sa objemy dvoch kvádrov rovnajú *, ich povrchy* nemusia *byť rovnaké.*

Ak sú povrchy *dvoch kvádrov rôzne, ich objemy môžu byť* rovnaké *.*

7 Pomer a mierka

A1 Na výlete je 30 žiakov, počet chlapcov a dievčat je v pomere 3 : 2.
Rozhodni o pravdivosti tvrdení a nepravdivé oprav tak, aby boli pravdivé.

a Na výlete je viac chlapcov ako dievčat. **pravda – nepravda**

Lebo

b Na výlete je 12 dievčat. **pravda – nepravda**

Lebo

c Na výlete je trikrát viac chlapcov ako dievčat. **pravda – nepravda**

Lebo na výlete je 3 : 2 = 1,5-krát viac chlapcov ako dievčat.

d Na výlete sú $\frac{2}{3}$ žiakov dievčatá. **pravda – nepravda**

Lebo na výlete sú $\frac{2}{5} = \frac{2}{2+3}$ žiakov dievčatá.

A2 Miškin učiteľ biológie chce, aby si žiaci sami našli chyby v teste a opravili ich.
Tak sa podľa neho opäť niečo naučia. Vždy im povie len pomer správnych a nesprávnych odpovedí.
V jej prípade to bolo 5 : 2. Učiteľ vždy pridá informáciu, koľko otázok zodpovedali správne.
Miška ich mala správne 15. Koľko odpovedí si musí Miška opraviť?

Miška správne zodpovedala 15 otázok, v pomere tomu prislúcha číslo 5.
Jeden diel pomeru preto bude zodpovedať 15 : 5 = 3 otázkam.
Počet nesprávne zodpovedaných otázok predstavuje 2 diely, je ich preto 2 · 3 = 6.
Miška si musí opraviť 6 otázok.

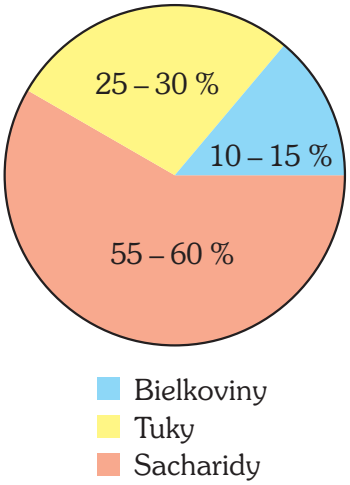
A3 V grafe je znázornený odporúčané zloženie sacharidov, bielkovín a tukov v dennom príjme energie. V ktorej z možností je správne uvedený pomer zodpovedajúci odporúčanému rozloženiu základných zložiek v potrave?

a bielkoviny : tuky : sacharidy 10 : 30 : 60 správne

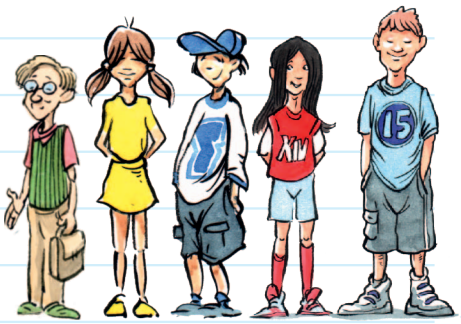
b bielkoviny : tuky : sacharidy 5 : 15 : 30 správne

c sacharidy : tuky : bielkoviny 15 : 25 : 60 nesprávne

d sacharidy : tuky : bielkoviny 29 : 14 : 7 správne



A4 V 7.B je pomer chlapcov a dievčat 7 : 2.



a Mohla by mať 7.B 27 žiakov? Prečo? Vysvetli to.

Áno, lebo 27 sa dá presne rozdeliť v pomere 7 : 2.
Pomer 7 : 2 znamená spolu 9 „dielikov“, 27 : 9 = 3.
Chlapcov by bolo teda 3 · 7 = 21 a dievčat 3 · 2 = 6.

b Mohla by mať 7.B 25 chlapcov? Prečo? Vysvetli to.

Nie, lebo pomer 7 : 2 je taký istý ako pomer 3,5 : 1, čo znamená, že chlapcov je 3,5-krát viac ako dievčat, preto dievčat by bolo 25 : 3,5 = 7,14…, čo nie je celé číslo. Počet dievčat musí byť celé číslo.

A5 Simona si chce z pol kila obyčajného cukru vyrobiť domáci škoricový cukor. Chce docieliť, aby mal také isté zloženie ako ten z obchodu. V 20 gramových balíčkoch škoricového cukru, ktoré v obchodoch bežne predávajú, je 2,2 g čistej škorice.

a Koľko gramov čistej škorice bude Simona celkovo potrebovať? Zdôvodni odpoveď.

V 20 g škoricového cukru je 2,2 g škorice, zvyšných 17,8 g je cukor.
Pomer cukru a škorice je teda 178 : 22 = 89 : 11.
89 : 11 = $8,\overline{09}$. Čistej škorice je $8,\overline{09}$-krát menej a 500 g : $8,\overline{09}$ ≐ 61,80 g
Simona bude potrebovať približne 61,8 g čistej škorice.

b Koľko balíčkov čistej škorice musí kúpiť, ak jeden balíček má 20 g?

61,8 : 20 ≐ 3,09 Bude musieť kúpiť 4 balíčky škorice.

A6 Na obrázku sú ceny a gramáž rôznych balení tej istej čokolády.

a Urč, v akom pomere sú jednotlivé balenia čokolády vzhľadom na ich hmotnosť.

400 g, 1kg = 1 000 g 400 : 1 000 : 2 500 = 4 : 10 : 25
2,5 kg = 2 500 g Hmotnosti balení sú v pomere 4 : 10 : 25.

b Rozhodni, či aj ceny za balenia sú v rovnakom pomere ako ich hmotnosti. Vysvetli, ako o tom rozhodneš.

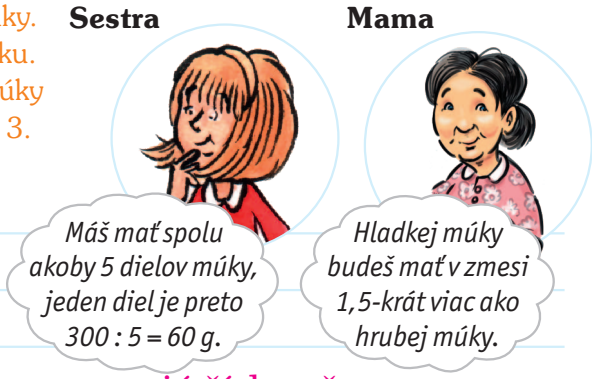
Ak by boli ceny v tom istom pomere ako hmotnosti balení, muselo by platiť, že kilové balenie stojí 2,5-krát menej ako 2,5-kilové balenie a 400 g balenie stojí 6,25-krát menej ako 2,5-kilové (lebo 2 500 : 400 = 6,25).

42,73 : 2,5 = 17,092 ≠ 17,81
42,73 : 6,25 = 6,836 8 ≠ 7,43

So žiakmi môžete diskutovať, prečo najmenšie balenie väčšinou „vychádza“ najdrahšie.

Pomer cien balení nie je rovnaký ako pomer hmotností balení.

A7 V recepte na bábovku potrebujeme 300 g polohrubej múky. Soňa zistila, že majú doma len hladkú múku a hrubú múku. Na internete našla, že správny pomer hrubej a hladkej múky na dosiahnutie efektu a vlastností polohrubej múky je 2 : 3. Nevedela však, ako ďalej postupovať, preto poprosila sestru a mamu o pomoc.



a Kto radí Soni správne? Ako to vieš? Vysvetli to.

Obe jej radia správne.
Sestra jej vysvetľuje ako funguje pomer a čo znamenajú čísla v ňom.
Mama pomer premenila na desatinné číslo. $3 : 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

b Koľko ktorej múky má Soňa zmiešať?

hrubá : hladká = 2 : 3, spolu je 2 + 3 = 5 dielov, jeden diel je 300 : 5 = 60 g.
Hrubej múky potrebuje 60 · 2 = 120 g, hladkej múky potrebuje 60 · 3 = 180 g.
Soňa má zmiešať 180 g hladkej a 120 g hrubej múky.

A8 Tomáš pravidelne pripravuje pre kamošov šumivý pomarančový nápoj z pomarančového džúsu a sódy. V piatok urobil 5 litrov nápoja, keď zmiešal 2 litre džúsu s 3 litrami sódy. V sobotu urobil 7 litrov nápoja, keď zmiešal 3 litre džúsu so 4 litrami sódy.

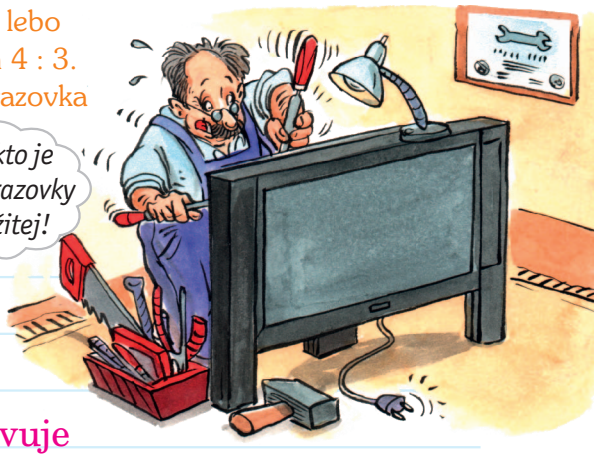
a Tomášov kamarát Maťo v sobotu povedal: *„Hmm, dnes to chutí inak ako včera.“* Mal Maťo pravdu? Odpoveď zdôvodni.

Piatok .... dž : s .... 2 : 3 .... 3 : 2 = 1,5
Sobota .... dž : s .... 3 : 4 .... 4 : 3 ≐ 1,33
V piatok bolo v nápoji 1,5-krát viac sódy ako džúsu, v sobotu len 1,33-krát viac. Preto chutili odlišne.

b Kedy chutil nápoj viac „pomarančovo“? Odpoveď zdôvodni.

Viac „pomarančovo“ chutil nápoj v sobotu, lebo na liter džúsu bolo v nápoji len 1,33 l sódy, v piatok to bolo až 1,5 l sódy.

A9 Pán Eugen sa pokúšal opraviť televízor s pomerom strán 16 : 9, lebo sa mu nepáčilo, že na obrazovke má len obraz s pomerom strán 4 : 3. Má pravdu, ak vieš, že po zaokrúhlení na celé milimetre má obrazovka rozmery 853 × 480 mm? Zdôvodni svoju odpoveď.



Plocha obrazovky je 85,3 · 48 = 4 094,4 cm².
Obraz s pomerom strán 4 : 3 je rovnako „vysoký“, teda 48 cm prislúcha trom častiam (v pomere 4 : 3).
Jedna časť je 48 : 3 =16 cm a štyri sú 4 · 16 = 64 cm.
Obraz zaberá plochu 64 · 48 = 3 072 cm², čo predstavuje (3 072 : 4 094,4) · 100 = 75,03 %, nevyužitý zvyšok je 100 % – 75 % = 25 %.
Pán Eugen má pravdu.

Keďže výška obrazu je v oboch prípadoch rovnaká, úlohu možno vypočítať aj bez obsahu. Stačí určiť, koľko percent šírky obrazovky tvorí šírka obrazu.

A10 Milka si doma pripravuje prací gél podľa nasledujúceho receptu.

Suroviny	Postup
100 g na jemno nastrúhaného mydla	1. Do 2 litrov vriacej vody nasypeme nastrúhané mydlo a premiešame.
100 g sódy na pranie	2. Prilejeme ďalšie 2 litre vriacej vody a za stáleho miešania prisypeme sódu.
4 l vody	3. Dôkladne premiešame a necháme 24 hodín odstáť.
	4. Vznikne gél vhodný na pranie bieleho i farebného oblečenia.

Milka má doma mydlo s hmotnosťou 140 g a 300-gramové balenie sódy. Chce pripraviť čo najviac pracieho gélu. Recept si môže upraviť buď podľa množstva mydla, alebo podľa množstva sódy. Čo je pre ňu výhodnejšie? Prečo? Aké množstvá všetkých troch surovín bude potrebovať?

Mydlo a sóda majú vážiť rovnako, preto treba recept upraviť na 140 g mydla. Ak by chcela recept prispôsobiť množstvu sódy, tak by jej chýbalo 160 g mydla.

Pomer mydlo : sóda : voda je 100 g : 100 g : 4 l.

Tento pomer Milka potrebuje upraviť na 140 g : 140g : ? l.

Keďže množstvo mydla a sódy je 1,4-krát väčšie ako v recepte (100 · 1,4 = 140), musí byť aj množstvo vody 1,4-krát väčšie.

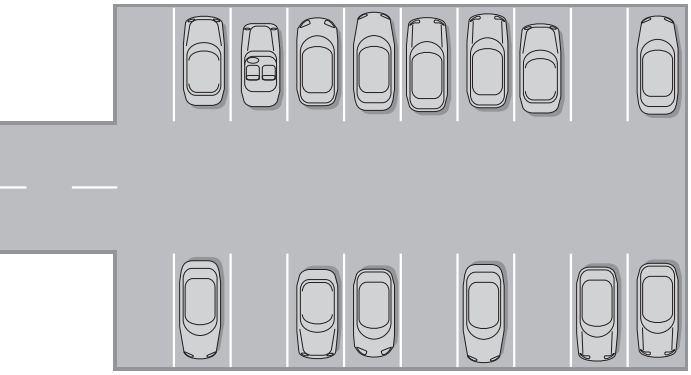
$$1{,}4 \cdot 4 = 5{,}6$$

Na výrobu pracieho gélu zo 140 g mydla a 140 g sódy potrebuje Milka 5,6 litra vody.

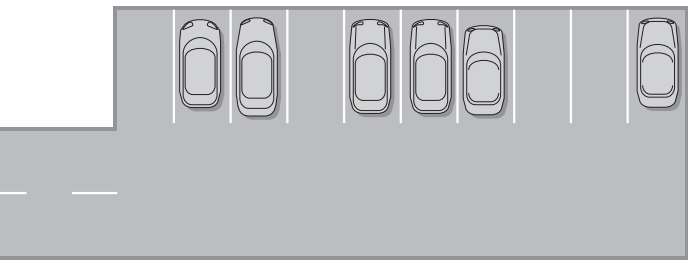
A11 Pri vlakovej stanici sú dve parkoviská. Keď pani Žofia vystúpila z vlaku, zavolala synovi a povedala: *„Tak už som tu, príď po mňa, čakám ťa na tom väčšom parkovisku, je prázdnejšie.“*

Syn po pár minútach prišiel a povedal: *„Ako si to myslela, že je toto parkovisko prázdnejšie? Vôbec nie je!“*

Ako to asi myslela mama a ako syn?



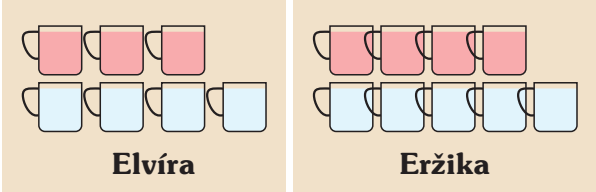
Na veľkom parkovisku je síce voľných 6 miest, ale z 20, teda pomer voľných miest ku všetkým miestam je 6 : 20 = 3 : 10.



Na malom sú voľné len 4 miesta, ale z 10, teda pomer voľných miest ku všetkým miestam je 4 : 10, čo je väčší pomer (na 10 parkovacích miest pripadajú 4 voľné, kým na veľkom parkovisku len 3 voľné).

Mama sa pozerala na počet voľných parkovacích miest a syn na pomer počtu voľných k všetkým parkovacím miestam.

A12 Pani Elvíra a pani Eržika sú vychýrené svojimi limonádami. Na obrázku je znázornené, koľko dielov sirupu a koľko dielov vody obsahujú ich limonády. Čo si myslíš o tvrdeniach **a**, **b** a **c**? Sú správne alebo nesprávne? Svoju odpoveď zdôvodni.



a V oboch limonádach je o jeden diel vody viac ako sirupu, takže limonády budú chutiť rovnako.

Lebo pomer sirupu a vody je v každej limonáde iný (3 : 4 a 4 : 5) a preto nechutia rovnako.

správne – **nesprávne**

V tvrdení I je uvedené typické žiacke mylné „lineárne“ zmýšľanie, venujte preto dostatočný čas diskusii, prečo limonády nechutia rovnako.

b V oboch limonádach na každý diel sirupu pripadá $1\frac{1}{4}$ vody, takže limonády budú chutiť rovnako.

Lebo v Elvírinej limonáde na 1 diel sirupu pripadá $1\frac{1}{3}$ vody a preto nechutia rovnako.

správne – **nesprávne**

V tvrdení II môže byť pre žiakov problematické porozumieť, odkiaľ sa nabral zlomok $1\frac{1}{4}$. Na Eržikinom recepte im vysvetlite korešpondenciu 1 ružový dielik na 1 modrý dielik, pričom 1 modrý dielik zostal a ten sa rovnomerne rozdelí medzi 4 ružové dieliky, preto $\frac{1}{4}$.

c V Elvírinej limonáde tvorí sirup $\frac{3}{4}$ celej zmesi, zatiaľ čo v Eržikinej sú to $\frac{4}{5}$.

Lebo v Elvírinej tvorí sirup $\frac{3}{7}$ celej zmesi a v Eržikinej sú to $\frac{4}{9}$.

správne – **nesprávne**

A13 Lucia a Linda hrali kartovú hru, ktorej cieľom bolo získať čo najviac kariet. Na začiatku hry si rovnomerne rozdelili všetky karty. Celkový počet kariet sa nemenil. Keď boli v polovici hry, pomer počtu Luciiných a Lindiných kariet bol 5 : 8. Keď hru dohrali, bol tento pomer 2 : 3.

a Ktorá z nich vyhrala?

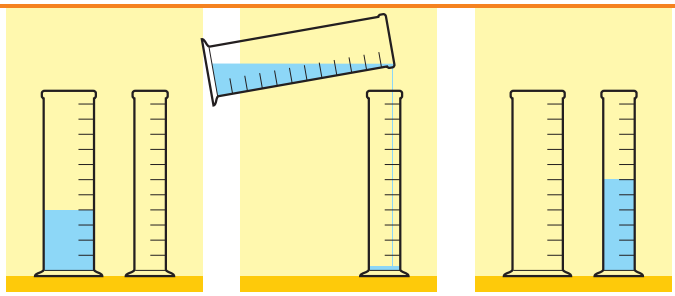
Vyhrala Linda, lebo z pomeru 2 : 3 vidno, že mala 3 diely všetkých kariet, kým Lucia len 2.
(Linda mala 1,5-krát viac kariet ako Lucia.)

b Mala Lucia na konci hry viac alebo menej kariet ako v polovici hry?

8 : 5 = 1,6 znamená, že v polovici hry mala Linda 1,6-krát kariet viac ako Lucia. Na konci mala Linda už len 1,5-krát viac kariet ako Lucia. Z toho vyplýva, že si Lucia „polepšila“, teda na konci hry mala viac kariet ako v polovici hry.

Ak je úloha b) pre žiakov ťažká, navrhnite im, aby úlohu riešili s celkovým počtom kariet, ktorý vyhovuje obom pomerom. V hre mohlo byť napríklad 130 kariet, v polovici mala Lucia 50 a Linda 80. Na konci mala Lucia [130 : (2 + 3)] · 2 = [130 : 5] · 2 = 26 · 2 = 52 kariet a Linda zvyšok. V druhej polovici hry teda Lucia 2 karty vyhrala.

A14 Širšia a užšia skúmavka majú vyznačené dieliky, ktorých rozostup je na oboch rovnaký. Do širšej skúmavky sme naliali vodu do výšky štvrtého dielika. Keď sme ju preliali do užšej, voda siahala do výšky šiesteho dielika.



a Obidve skúmavky vyprázdnime a širšiu naplníme tekutinou do výšky šiesteho dielika. Do výšky ktorého dielika by siahalo to isté množstvo tekutiny v užšej skúmavke? Odpoveď zdôvodni.

4 dieliky v širšej skúmavke zodpovedali 6 dielikom v užšej skúmavke.

Polovica vody by teda zabrala 2 dieliky v širšej a 3 v užšej skúmavke.

Ak množstvo tekutiny strojnásobíme,

v širšej to bude $2 \cdot 3 = 6$ dielikov a v užšej $3 \cdot 3 = 9$ dielikov.

Alebo využijeme pomer medzi skúmavkami $4 : 6 = 2 : 3$.

Šiestim dielikom v širšej skúmavke bude zodpovedať viac dielikov v užšej, preto násobíme zlomkom väčším ako 1, dostaneme $6 \cdot \frac{3}{2} = 9$.

b Obidve skúmavky vyprázdnime a užšiu naplníme tekutinou do výšky jedenásteho dielika. Do výšky ktorého dielika by siahalo to isté množstvo tekutiny v širšej skúmavke? Odpoveď zdôvodni.

Podobne ako v úlohe a) využijeme pomer: k 11 dielikom bude prislúchať menej dielikov, preto vynásobíme zlomkom menším ako 1. $11 \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$.

Nová tekutina bude siahať do výšky $7\frac{1}{3}$ dielika širšej skúmavky.

A15 Žiaci dostali mapu s mierkou 1 : 50 000 a k nej dve úlohy.
1. Vzdialenosť dvoch miest na mape je 1 cm. Aká je vzdialenosť týchto miest v skutočnosti?
2. Vzdialenosť dvoch miest je v skutočnosti 5 km. Aká je vzdialenosť týchto miest na mape?

Oliver:	**Sandra:**	**Ľubica:**	**Jakub:**
Úloha 1: 5 m	Úloha 1: 5 km	Úloha 1: 500 m	Úloha 1: 50 m
Úloha 2: 5 cm	Úloha 2: 10 cm	Úloha 2: 50 cm	Úloha 2: 100 cm

a Kto vyriešil úlohu 1 správne? Odpoveď zdôvodni.

Mierka 1 : 50 000 znamená,

že 1 cm na mape je 50 000 cm v skutočnosti.

50 000 cm = 500 m = 0,5 km

Úlohu správne vyriešila Ľubica.

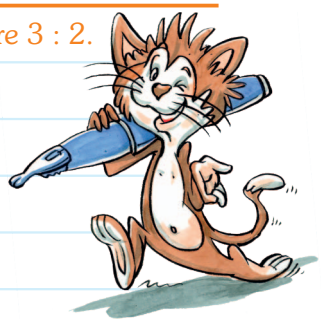
b Kto vyriešil úlohu 2 správne? Odpoveď zdôvodni.

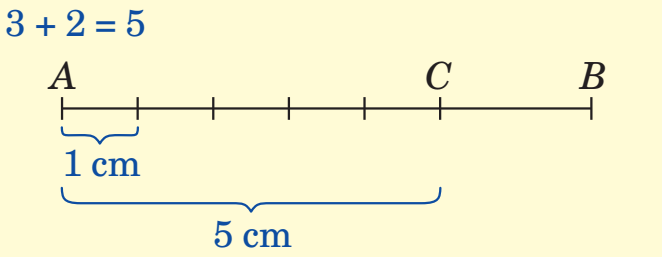
5 km = 5 000 m = 500 000 cm

1 cm na mape je v skutočnosti 50 000 cm. V zadaní je 10-krát centimetrov viac, preto aj na mape to musí byť 10-krát viac, teda 10 cm.

Úlohu správne vyriešila Sandra.

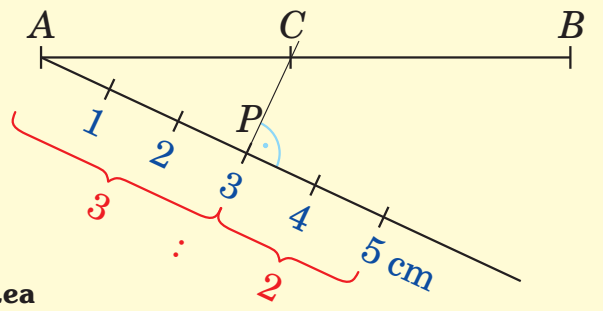
A16 Za domácu úlohu mali siedmaci konštrukčne rozdeliť úsečku *AB* bodom C v pomere 3 : 2. Vysvetli postupy Emy, Ley a Betky. Vyriešili domácu úlohu správne? Ak nie, vysvetli, v čom spravili chybu.





Ema

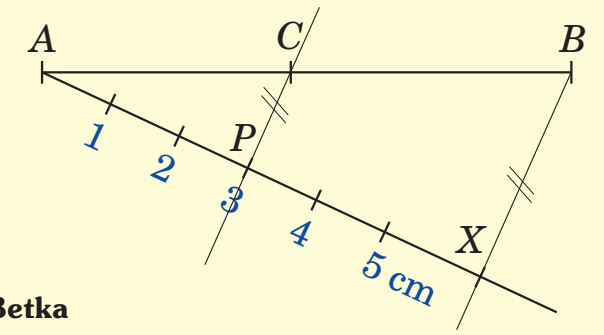
Ema síce správne zistila, že úsečku treba rozdeliť na 5 zhodných dielikov, ale posledný dielik sa musí končiť v bode *B*.
V jej konštrukcii bod *C* nedelí úsečku *AB* v pomere 3 : 2, skôr to vyzerá na 5 : 2.



Lea

Lea správne narysovala pomocnú polpriamku a rozdelila ju na 5 rovnakých častí v pomere 3 : 2. Bod pri 3 cm označila *P* a v ňom zostrojila kolmicu na pomocnú polpriamku. Tam, kde sa kolmica pretla s úsečkou *AB*, označila hľadaný bod *C*.

Tento postup nie je správny, pretože pomocná polpriamka môže zvierať s úsečkou *AB* ľubovoľný uhol a tých 5 dielikov na nej môže mať ľubovoľnú veľkosť (navzájom rovnakú). To znamená, že iná polpriamka a dieliky na nej by vždy určili iný bod *P* a kolmica iný bod *C*. Kolmica je chybný krok.



Betka

Betka správne zostrojila pomocnú polpriamku a vyznačila na nej 5 zhodných dielikov. Potom spojila bod *X* s bodom *B* a cez bod *P* viedla rovnobežku s *XB*. Tam, kde sa rovnobežka pretla s úsečkou *AB*, vznikol bod *C*.

Úsečka *XB* v jej postupe však nijako nesúvisí s naznačenými 5 dielikmi, ktoré sú kľúčové pri určení polohy bodu *C*.
Betka mala namiesto toho narysovať úsečku spájajúcu bod *B* s bodom na poslednom dieliku (5 cm) a zostrojiť rovnobežku s touto úsečkou cez bod *P*.

8 Priama a nepriama úmernosť

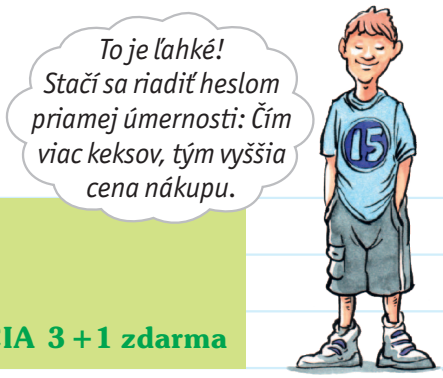
A1 Doplň tabuľku tak, aby množstvo vody bolo priamo úmerne závislé od času.

Čas [dní]	2	4	5	6	7	10	15
Voda [litrov]	13	26	32,5	39	45,5	65	97,5

A2 Pani učiteľka si chcela overiť, či žiaci rozumejú tomu, ako funguje priama úmernosť, a tak pre nich vymyslela „nákupný experiment“. Rozdelila žiakov do troch skupín a dala im úlohu:

Choďte postupne po jednom do obchodu a nakúpte tak, aby ste v rámci skupiny vytvorili priamu úmernosť medzi počtom keksíkov a cenou, ktorú každý zaplatil.

Podarilo sa niektorej z troch skupín splniť zadanie pani učiteľky? Svoju odpoveď zdôvodni.



Zelení

Žiak **A**: 1 keks ..... zaplatil 0,75 €
Žiak **B**: 2 keksy .... zaplatil 0,75 + 0,75 €
Žiak **C**: 3 keksy .... zaplatil 0,75 + 0,75 + 0,75 €
Žiak **D**: 4 keksy .... zaplatil 0,75 + 0,75 + 0,75 + 0,0 € **AKCIA 3 + 1 zdarma**

Modrí

Žiak **I**: 1 keks ..... zaplatil 0,69 €
Žiak **J**: 2 keksy .... zaplatil 0,69 + 0,55 €
Žiak **K**: 3 keksy .... zaplatil 0,69 + 0,55 + 0,90 €
Žiak **L**: 4 keksy .... zaplatil 0,69 + 0,55 + 0,90 + 0,80 €

Oranžoví

Žiak **E**: 1 keks ..... zaplatil 0,69 €
Žiak **F**: 3 keksy .... zaplatil 0,69 + 0,69 + 0,69 €
Žiak **G**: 4 keksy .... zaplatil 0,69 + 0,69 + 0,69 + 0,69 €

Pri priamej úmernosti platí, že koľkokrát sa zväčší (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa zväčší (zmenší) aj druhá veličina.

Všetky skupiny teda splnili časť úlohy, že postupne si každý ďalší žiak kúpil viac keksíkov. Priama úmernosť by to však bola iba vtedy, keby sa rovnakým spôsobom navyšovala aj cena za keksíky (dvakrát viac keksíkov znamená dvakrát vyššiu cenu atď.).

Zelená skupina začala dobre, lenže žiak D využil akciu 3 + 1 zdarma, platil teda za väčšie množstvo keksov rovnako ako žiak C. Nejde teda o priamu úmernosť.

Modrá skupina síce splnila heslo „čím viac keksov, tým vyššia suma,“ ale v tomto prípade nejde o priamu úmernosť, keďže cena sa nezvyšovala toľkokrát, koľkokrát sa zvýšil počet keksov.

Oranžová skupina ako jediná zadanie splnila, pretože koľkokrát sa zvýšil počet keksov, toľkokrát sa zvýšila aj cena celého nákupu. Iba v tomto prípade ide o priamu úmernosť.

A3 Žiaci mali v teste rozhodnúť, či je nasledujúca úloha na priamu alebo na nepriamu úmernosť. Rovnako mali pripísať zdôvodnenie.

Usušením 3 kg čerstvých sliviek získame 750 g sušených.
Koľko sušených sliviek dostaneme usušením 9 kg čerstvých sliviek?

Koľko bodov by podľa teba dostala Zuzka za svoju odpoveď, ak mohla získať maximálne 2 body? Prečo si to myslíš?

Možno pol boda, lebo Zuzka vie, že pri nepriamej úmernosti platí, že ak sa jedna veličina zväčšuje, druhá sa zmenšuje. Nedokáže však túto vedomosť aplikovať. V tomto prípade nejde o nepriamu, ale o priamu úmernosť. Množstvo čerstvých sliviek strojnásobíme, preto sa aj množstvo sušených sliviek strojnásobí.

V diskusii porovnajte žiacke odpovede. Kladťe dôraz na to, aby každý počet bodov zdôvodnil.

A4 V škole vymieňali cez prázdniny celú elektroinštaláciu. Dodávateľ prác garantoval, že to jeho 4 elektrikári urobia za 20 dní a škola môže bez problémov začať nový školský rok. Po 10 dňoch však bolo jasné, že to nestíhajú, lebo mali hotovú len tretinu práce. Koľko ďalších, rovnako výkonných elektrikárov by mala firma do školy ešte poslať, aby sa práce dokončili načas? Postup riešenia vysvetli.

Za 10 dní .... $\frac{1}{3}$ práce .... 4 elektrikári

Za 10 dní .... $\frac{2}{3}$ práce .... x elektrikárov

Keďže za ten istý čas treba vykonať dvojnásobok práce, budú na to potrebovať 2-krát viac elektrikárov, spolu teda 8. Preto musí firma do školy poslať ešte štyroch ďalších elektrikárov.

A5 Riaditeľ školy cez prázdniny vymieňal na chalupe strešnú krytinu. Koľko robotníkov navyše potrebuje, ak po 6 dňoch mali 3 robotníci hotovú len polovicu strechy a na prácu zostávajú už len 2 dni? Predpokladáme, že všetci robotníci sú rovnako výkonní.

Za 6 dní .... $\frac{1}{2}$ práce .... 3 robotníci

Za 2 dni .... $\frac{1}{2}$ práce .... x robotníkov

Keďže za tretinový čas treba vykonať rovnako veľa práce, bude na to potrebovať 3-krát viac robotníkov, spolu teda 9. Preto pán riaditeľ potrebuje ešte navyše 6 robotníkov.

A6 Monika skúmala, ako navzájom súvisia dĺžka a šírka v rôznych obdĺžnikoch, ktoré majú obsah 12 cm². Nebola si však istá, či sú dĺžky strán tohto obdĺžnika priamo alebo nepriamo úmerné.

a Čo myslíš ty? Ako jej to vysvetlíš?

Dĺžka [cm]	1	2	3	4	6
Šírka [cm]	12	6	4	3	2
Obsah [cm²]	12	12	12	12	12

Šírka nepriamo úmerne závisí od dĺžky.
Ak dĺžku zväčšíme napr. trikrát,
šírku musíme trikrát zmenšiť.
A to platí pre hociktoré zväčšenie.

$2 \cdot 6$
$\cdot 3$ $:3$
$6 \cdot 3$

b Platí to pre obdĺžnik s ľubovoľným obsahom alebo len pre niektoré obdĺžniky? Prečo?

Platí to pre obdĺžnik s ľubovoľným obsahom.
Obsah (napr. 12 cm²) sa nemení, preto platí: ak dĺžku vynásobíme nejakým číslom, šírku musíme tým istým číslom vydeliť (aby sa súčin nezmenil).
Akoby sme obsah násobili jednotkou.

$1 \cdot 12 = 12$ $\quad$ $2 \cdot 6 = 12$ $\quad$ $a \cdot b = S$

$(1 \cdot 3) \cdot (12 : 3) = 12$ $\quad$ $(2 \cdot 2) \cdot (6 : 2) = 12$ $\quad$ $(a \cdot \text{číslo}) \cdot (b : \text{číslo}) = S$

c Monika bola zvedavá aj na to, ako navzájom súvisia dĺžka a šírka v rôznych obdĺžnikoch, ktoré majú rovnaký obvod. Doplň do tabuľky chýbajúce rozmery obdĺžnikov s obvodom 12 cm.

d Sú dĺžka a šírka obdĺžnika v prípade obvodu priamo alebo nepriamo úmerné? Zdôvodni to.

Dĺžka [cm]	1	2	3	4	5
Šírka [cm]	5	4	3	2	1
Obvod [cm]	12	12	12	12	12

Keď sa dĺžka zväčší, šírka sa skráti, takže by to mohla byť nepriama úmernosť.
Lenže keď sa dĺžka zväčší dvakrát (z 1 na 2), tak šírka sa dvakrát nezmenší (musela by byť 2,5). Preto nejde o nepriamu úmernosť ani o priamu úmernosť.

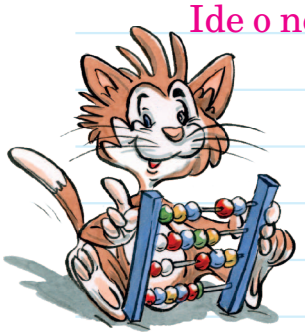
V úlohe b) budú žiaci pravdepodobne argumentovať empiricky (na rôznych veľkostiach obsahov), skúste ich však doviesť k podstate myšlienky (súčin sa nezmení, ak činiteľa vynásobíme tým istým číslom a potom ho ním vydelíme).

A7 Auto má priemernú spotrebu 5,3 litra na 100 km a plná nádrž mu vystačí na 800 km. Koľko kilometrov by dokázalo auto prejsť na plnú nádrž, keby priemerná spotreba klesla na 4,8 litra na 100 km? Bude to viac alebo menej ako 1 000 km? Ako to vieš?

Koľkokrát sa zmenší spotreba auta, toľkokrát sa zväčší dojazd.
Ide o nepriamu úmernosť.

spotreba 5,3 l … dojazd 800 km ↑
spotreba 4,8 l … dojazd x km ↓

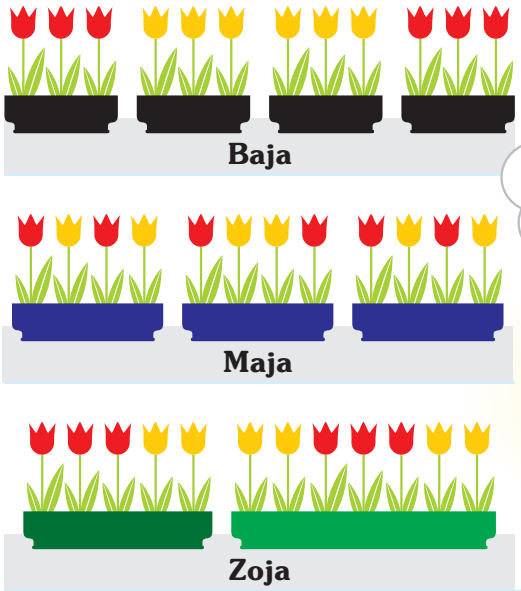
$5{,}3 : 4{,}8 = x : 800$
$5{,}3 \cdot 800 = 4{,}8 \cdot x$
$4\,240 = 4{,}8 \cdot x$
$x = 883{,}33$ km



Pri spotrebe 4,8 l na 100 km
by auto prešlo približne 883 km, čo je menej ako 1 000 km.

A8 Žiaci 7.A mali vymyslieť situáciu zo života, v ktorej bude zahrnutá aj nepriama úmernosť.
Pani učiteľke sa veľmi sa páčil jeden námet.
Baja, Maja a Zoja sadili babke kvety. Každá dostala 12 rovnakých tulipánov, ktoré mali zasadiť podľa svojho vkusu. Na výber mali množstvo kvetináčov rôznych veľkostí. Výsledok ich práce je na obrázku.

Babka bola s výsledkom práce vnučiek veľmi spokojná a povedala:
„Super, čím viac kvetov dáme do jedného kvetináča, tým menej kvetináčov potrebujeme.“
Pani učiteľka potom diskutovala so žiakmi 7.B o tom, či ide o vhodný príklad nepriamej úmernosti.
S kým súhlasíš a prečo? Ide o nepriamu úmernosť alebo nie?



Pre nepriamu úmernosť platí, že koľkokrát sa zväčší (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa zmenší (zväčší) druhá veličina.

Miloš:
Ak sa počet kvetov v kvetináči zväčšuje, celkový počet kvetináčov sa zmenšuje, veličiny sa správajú opačne.
Miloš by mal ešte overiť, či sa počet zmenšuje/zväčšuje rovnako-násobne.

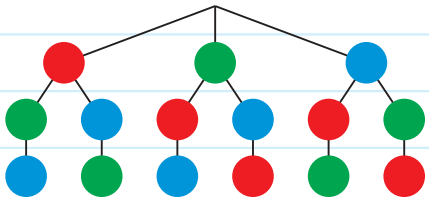
Matej:
Má pravdu v tom, že Zoja v kvetináčoch nemá rovnaký počet kvetov.
Porovnajme Baju a Zoju. Počet kvetináčov je dvakrát menší, čiže ak by išlo o nepriamu úmernosť, počet kvetov v každom z nich by mal byť dvakrát väčší.
O nepriamu úmernosť teda nejde.
Bolo by to tak iba vtedy, ak by Zoja mala v každom kvetináči 6 kvetov.

Klára:
Všimla si rôzne rozdelenie červených a žltých kvetov –
v tejto úlohe to však nemá nijaký vplyv na úmernosť.

Diskutujte so žiakmi o vyjadreniach Miloša, Kláry a Mateja.

10 Kombinatorika

A1 Dávid si na vyriešenie príkladu v domácej úlohe nakreslil takýto stromový diagram. Aké mohlo byť zadanie príkladu, ktorý riešil, a aký výsledok dostal?



Zadanie príkladu: Koľkými spôsobmi možno na seba uložiť tri kocky, ak je každá inej farby?

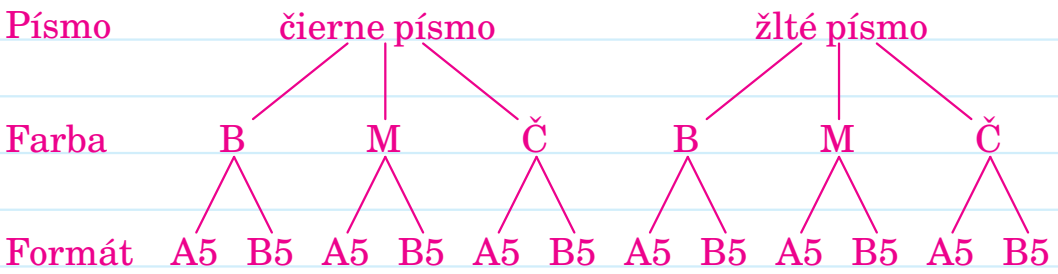
Výsledok: 6

A2 V obchode so suvenírmi v Osle si môžeš navrhnúť vlastný zápisník s nápisom NO(R)WAY, pričom na zadnú stranu vytlačia aj tvoje meno. Zápisníky sú v dvoch formátoch (A5 a B5) a v troch farbách (biela, modrá, červená). Nápis je buď v čiernej, alebo v žltej farbe. Tomáš si dlho nevedel vybrať, jeho sestra Tina už stratila trpezlivosť a povedala mu:

„Rozhodni sa konečne, veď máš len 10 možností! Ja už chcem ísť na lososový burger!"

Tomáš jej odpovedal: *„Aj losos vie lepšie počítať ako ty, tých možností je viac!"*

Kto z nich má pravdu? Zdôvodni odpoveď.

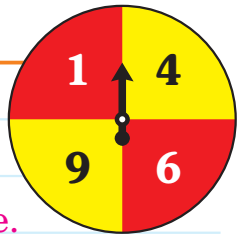


Všetkých možností je 12, preto mal pravdu Tomáš.

A3 Naraz hodím tri rôznofarebné kocky a sčítam čísla, ktoré padnú. Koľko je takých možností, v ktorých je súčet menší ako 5? Vysvetli, ako vieš, že tvoja odpoveď je správna.

Najmenší možný súčet je 3, ďalší prípustný je už len 4.
Najmenšia hodnota, ktorá môže padnúť, je jednotka.
Preto súčet 3 dostanem len v jedinom prípade, ak na každej kocke padne jednotka.
Súčet 4 dostanem len tak, že na jednej kocke padne dvojka a na ostatných musia byť jednotky. Dvojku môžem mať na hociktorej kocke, preto sú to 3 možnosti.
Spolu existujú teda 4 možnosti.

Toto je jednoduchá úloha, ktorá žiakov vedie k argumentácii typu systematické vymenovanie, keď musia argumentovať, že prešli cez všetky možnosti (na nič nezabudli, ani nič nezapočítali dvakrát). Úlohu môžete rozšíriť o prípad, ak je súčet menší ako 6. Vtedy pribudne možnosť pre súčet 5, ktorý vieme dostať ako 1 + 1 + 3 alebo 1 + 2 + 2. Na to sú len 3 + 3 možnosti (kde môže byť trojka, resp. jednotka). Spolu teda 4 + 6 = 10 možností.



A4 Dvakrát zatočím číselným spinnerom a sčítam čísla, ktoré vytočím.

a V koľkých možnostiach bude súčet párne číslo?

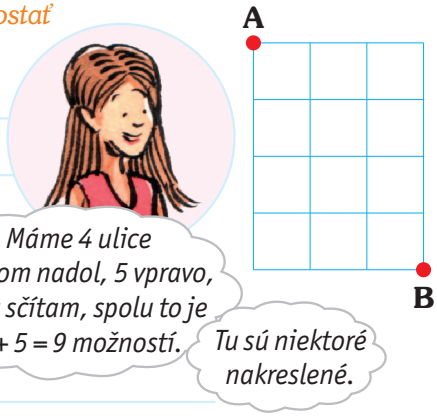
Súčet je párny len vtedy, ak sú obe čísla párne alebo obe nepárne.
Preto je to buď 4 + 6, 6 + 4, 4 + 4 a 6 + 6 alebo 1 + 9, 9 + 1, 1 + 1 a 9 + 9.
Spolu teda 8 možností.

b V koľkých možnostiach bude súčet väčší ako 9?

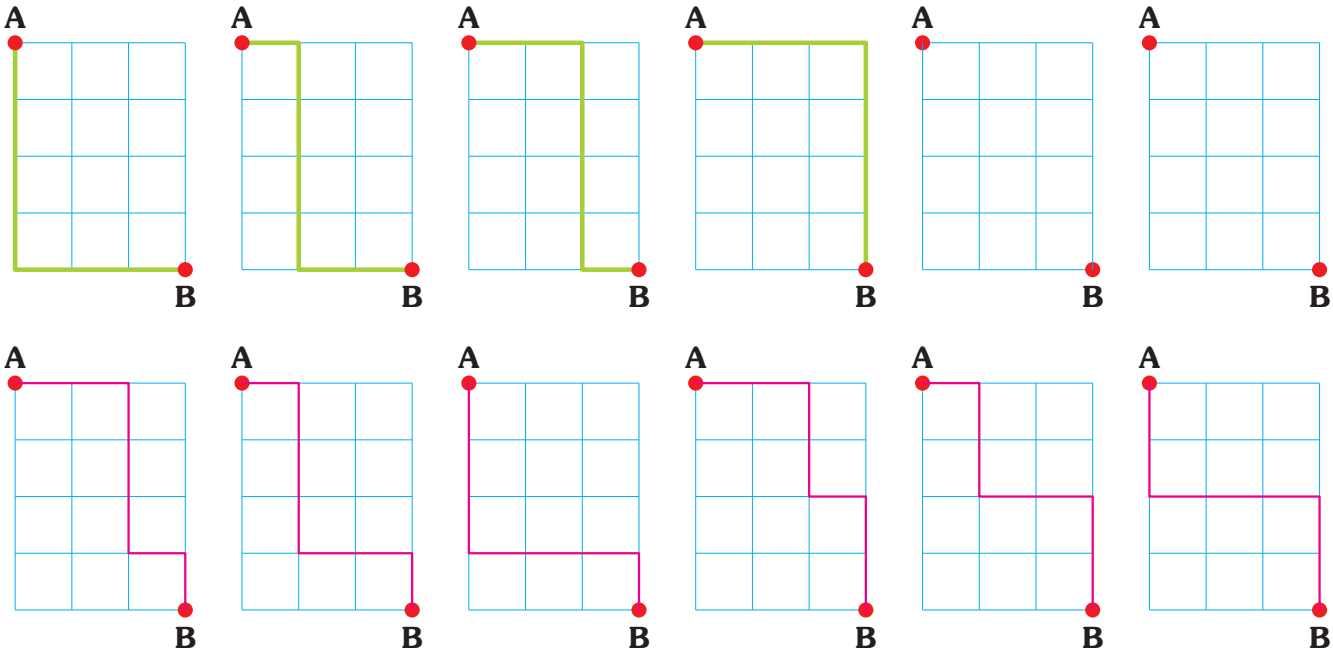
Aby sme dostali súčet aspoň 10, môžem najprv vytočiť číslo 9
a druhé číslo môže byť hocijaké (4 možnosti).
Alebo naopak, číslo 9 vytočím ako druhé v poradí a pre prvé mám 3 možnosti
(nerátame 9 + 9, lebo tú možnosť sme už zahrnuli predtým).
Ešte ostávajú možnosti, že vytočím 4 + 6, 6 + 4 alebo 6 + 6.
Spolu teda 4 + 3 + 3 = 10 možností.

Diskutujte so žiakmi a dohodnite sa, či vám záleží na poradí čísel v súčte (vtedy je odpoveď 10 možností) alebo nezáleží (vtedy je odpoveď 6 možností).

A5 Janka riešila úlohu z kombinatoriky: *Koľkými spôsobmi sa možno dostať z bodu A do bodu B, ak môžeme chodiť len vpravo a nadol?*
Je Jankino riešenie správne? Ako to vieš?



Nie je, lebo je ich minimálne 4 + 3 + 3 = 10.
Nové sú dokreslené do obrázka.
Všetkých možností je 35.



A6 Rodina Kochanská (otec, mama a dve dcéry) má nového psa Fibi.
Dohodli sa, že sa pri rannom a večernom venčení a rannom a večernom kŕmení budú striedať.
Posúď riešenia a rozhodni, ktoré je správne. Odpoveď zdôvodni.

a Koľkými rôznymi spôsobmi si môžu uvedené štyri denné povinnosti rozdeliť, ak každý člen rodiny bude mať za deň iba jednu zo spomínaných povinností?

Riešenie A: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ spôsobov
Rodina má 4 druhy povinností, každú povinnosť môže vykonávať jeden zo štyroch ľudí, ale nesmú sa opakovať, čiže počet ľudí sa postupne znižuje.

Riešenie B: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ spôsobov
Rodina má 4 druhy povinností, každú povinnosť môže vykonávať jeden zo štyroch ľudí, takže sú to 4 možnosti na každý druh povinnosti.

Správne je riešenie A.
Riešenie B nie je správne, pretože výpočet nezohľadňuje, že každý člen rodiny má iba jednu povinnosť denne. Sú tu zarátané aj možnosti, keď sa o Fibi stará jeden člen rodiny celý deň.

b Koľkými rôznymi spôsobmi si môžu uvedené štyri denné povinnosti rozdeliť, ak každý člen rodiny bude mať za deň iba jednu z povinností, ale deti chcú ráno dlhšie spať?

Riešenie A: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ spôsobov
Ranné povinnosti sú dve, môžu ich vykonávať iba rodičia, t. j. $2 \cdot 2$ možnosti.
Večerné dve povinnosti môžu vykonávať iba dievčatá, to sú tiež $2 \cdot 2$ možnosti.

Riešenie B: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ spôsoby
Ranné povinnosti sú dve, môžu ich vykonávať iba rodičia, t. j. 2 možnosti.
Večerné dve povinnosti môžu vykonávať iba dievčatá, to sú tiež iba rôzne dve možnosti.

Riešenie A nie je správne, pri ranných povinnostiach sa majú rodičia striedať, to znamená otec venčenie, mama kŕmenie alebo mama venčenie a otec kŕmenie. Možnosti sú len dve. Rovnako je to aj s dievčatami pri večernej starostlivosti. Správne je riešenie B.

c Koľkými rôznymi spôsobmi si môžu uvedené štyri denné povinnosti rozdeliť, ak každý člen rodiny bude mať za deň iba jednu z povinností, ale otec sa môže o Fibi starať iba večer?

Riešenie A: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ spôsobov
Od rána sa bude striedať mama a dievčatá, vždy jedna činnosť pre jednu z nich, čiže $3 \cdot 2 \cdot 1$ a posledná činnosť ostane na otca, čo je jedna možnosť.

Riešenie B: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ spôsobov
Pri ranných povinnostiach sa budú striedať mama a dievčatá, čiže $3 \cdot 3$ – to sa prestriedajú dvaja ľudia. Na večerné povinnosti teda ostanú ďalší dvaja členovia rodiny vrátane otca, ktorý ráno nemohol, čiže $2 \cdot 1$.

Začiatok riešenia A je správny – pri ranných povinnostiach sa budú striedať 3 osoby, to je $3 \cdot 2$. Lenže pri večerných povinnostiach sa bude striedať otec s osobou, ktorá nič nerobila ráno, teda $2 \cdot 1$. Správne riešenie: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.
Pri riešení B je chyba v tom, že pri ranných povinnostiach nezohľadňujeme, že každý má iba jednu povinnosť, čiže na ranné kŕmenie vyberáme z troch ľudí, ale na venčenie už iba z dvoch, preto má súčin byť $3 \cdot 2$.