I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

Argumentácia v matematike

pre 7. ročník ZŠ
a 2. ročník GOŠ

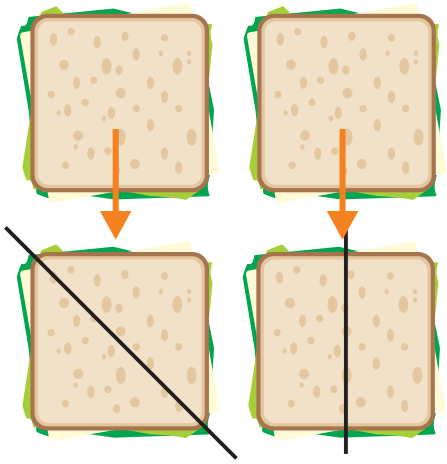
1. zošit

Projekt **MaTeK**

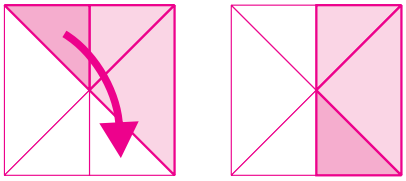
Orbis**P**ictus**I**stropolitana

1 Zlomky

A1 Otec spravil na olovrant dva sendviče. Prvý rozkrojil na polovice po uhlopriečke, druhý rovno. Lukáš dostal polovicu z druhého sendviča, Lucka polovicu z prvého. Lukáš sa nahneval, lebo vraj dostal menšiu polovicu ako Lucka. Ako mu vysvetlíš, že nemá pravdu?

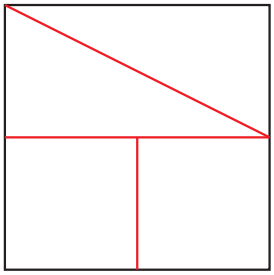


Ak rozdelím sendvič (tvaru štvorca) na dve rovnaké časti, plocha každej z nich bude stále polovica z plochy celého sendviča $a \cdot a$ (kde a je strana štvorca). Nezáleží na tom, ktorým smerom ho budeme krájať. Luckina i Lukášova časť majú rovnako veľkú plochu (polovicu z celého sendviča), preto sú rovnako veľké.



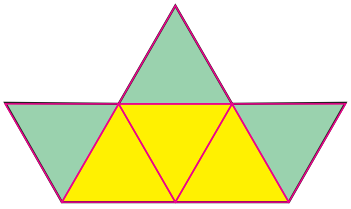
Dalo by sa to znázorniť aj tak, že by sme sendvič prekrojili aj po uhlopriečke, aj zvislo (viď obrázok). Po premiestnení tmavšieho trojuholníka z „trojuholníkovej polovice“ do dolnej časti dostaneme Lukášovu „obdĺžnikovú polovicu“.

A2 Roman tvrdí, že štvorec na obrázku rozdelil na štvrtiny. Má pravdu? Zdôvodni to.



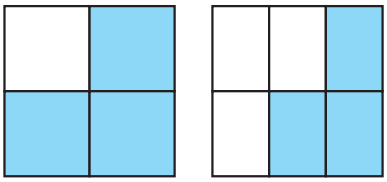
Áno, hoci jednotlivé časti nemajú rovnaký tvar, obsah majú rovnaký – štvrtinu obsahu štvorca. Horizontálna čiara delí štvorec na polovicu. Dolnú polovicu Roman rozdelil zvislou čiarou na polovice, vznikli teda štvrtiny pôvodného štvorca. Hornú polovicu rozdelil na dve polovice uhlopriečkou.

A3 Hugo pomáhal Veronike s vyfarbovaním loga. Povedal jej: „Nech sa páči. Štvrtina je zelená, tak ako si chcela.“ Veronika sa pozrela na vyfarbené logo a nahnevala sa. Prečo asi?



Lebo červená oblasť pozostáva z troch trojuholníkov s rovnakým obsahom, ako majú zelené. Hugo teda vyfarbil na zeleno $\frac{3}{6}$, čo je $\frac{1}{2}$ loga, a nie $\frac{1}{4}$.

A4 Simona tvrdí, že časti útvarov, ktoré sú na obrázku vyfarbené, predstavujú rovnaké zlomky, lebo v oboch sú vyfarbené tri časti. Má pravdu? Zdôvodni svoj názor.



Nemá pravdu, lebo
na obrázku vľavo je zlomok $\frac{3}{4}$ (3 časti zo 4 sú vyfarbené)
a na obrázku vpravo je zlomok $\frac{3}{6}$ alebo $\frac{1}{2}$
(3 časti zo 6 sú vyfarbené, teda polovica).

A5 Ktorý zo zlomkov podľa teba nepatrí do skupiny, lebo je v niečom iný? Svoju odpoveď zdôvodni.

A: $\frac{3}{4}$ **B:** $\frac{3}{8}$ **C:** $\frac{6}{8}$ **D:** $\frac{9}{12}$

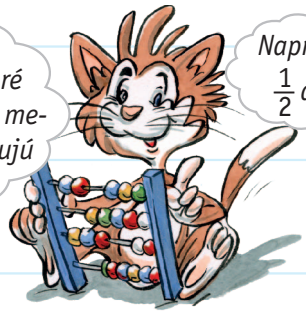
Zlomok B, lebo všetky ostatné zlomky sú zhodné so zlomkom $\frac{3}{4}$, alebo
zlomok C, lebo v čitateli aj v menovateli sú párne čísla,
kým ostatné zlomky majú v čitateli nepárne číslo.

A6 Ku každému zlomku napíš tri ekvivalentné zlomky.

a $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{3}{6}$ $\frac{3}{5} \rightarrow \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}$

$\frac{12}{6} \rightarrow \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{5}$ $\frac{6}{8} \rightarrow \frac{3}{4}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}$

Ekvivalentné zlomky sú zlomky, ktoré majú rôznych čitateľov a menovateľov, ale predstavujú rovnakú časť.



Napríklad $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{6}$.

b Žiaci mali ukázať, že aj ku každému prirodzenému číslu sa dajú napísať aspoň tri ekvivalentné zlomky. Čie zdôvodnenie je podľa teba najlepšie a prečo?

Dá sa to, lebo ja som našla až 7 zlomkov pre číslo 2.

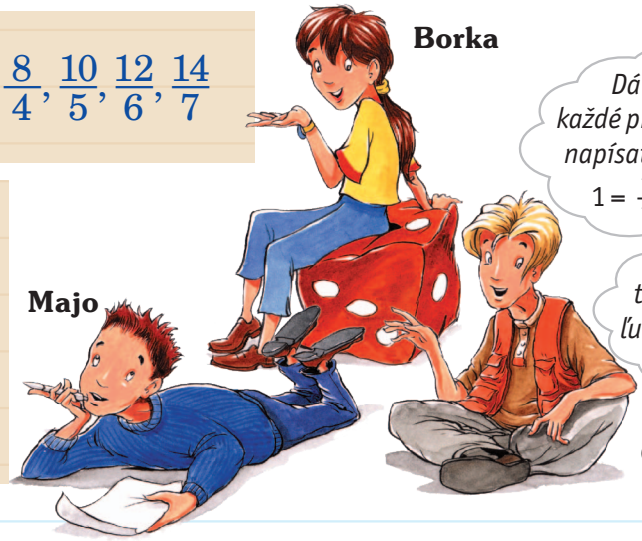
$2 \rightarrow \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}$

Dá sa to, vyskúšal som to na číslach 3, 4, 10.

$3 \rightarrow \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}$

$4 \rightarrow \frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{16}{4}$

$10 \rightarrow \frac{10}{1}, \frac{20}{2}, \frac{100}{10}$



Dá sa to vždy, veď každé prirodzené číslo stačí napísať ako zlomok, napr. $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$.

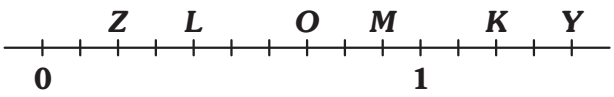
Potom môžem taký zlomok rozšíriť ľubovoľnými prirodzenými číslami.

Ondrejovo, lebo to zdôvodnil všeobecne pre ľubovoľné prirodzené číslo.
Borka to ukázala len pre jedno číslo a Majo len pre tri.

c Doplň tvrdenie tak, aby bolo pravdivé.

Každé prirodzené číslo a aj **každý** zlomok
môžeme vyjadriť **nekonečným** množstvom **ekvivalentných** zlomkov.

A7 Na číselnej osi sú znázornené čísla *Z, L, O, M, K, Y*. Napíš ich hodnotu zlomkom v základnom tvare. Vysvetli, ako vieš, že tvoje riešenie je správne.



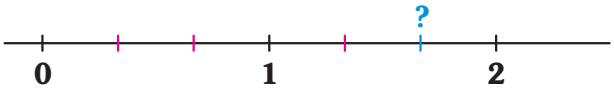
Číselná os je medzi číslami 0 a 1 rozdelená na 10 rovnakých dielikov.
Jeden dielik je teda $\frac{1}{10}$.
Potom $Z = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $L = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $O = \frac{7}{10}$, $M = \frac{9}{10}$, $K = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$, $Y = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$.
Všetky zlomky sú v základnom tvare,
lebo čitateľ i menovateľ sú po krátení dvojkou už nesúdeliteľné čísla.

A8 Ktorý zlomok môže byť podľa teba na vyznačenom mieste na číselnej osi? Svoju odpoveď zdôvodni.

a

Môže to byť $\frac{1}{5}$, keďže naznačené číslo je menšie ako $\frac{1}{2}$ a vyzerá byť aj menšie ako $\frac{1}{4}$. Na kontrolu si úsek od 0 po 1 rozdelíme na 5 častí.

b

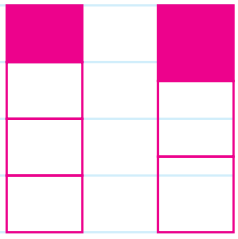


Môže to byť $\frac{5}{3}$, lebo je to viac ako 1 a aj viac ako 1,5. Pomôžeme si, ak úseky medzi 0 a 1 a medzi 1 a 2 rozdelíme na tretiny.

A9 V USA sa hmotnosť meria v jednotkách s názvom *libra*. Jeden z najobľúbenejších hamburgerov siete McDonald's sa v USA nazýva „štvrťlibrák" (u nás McRoyal), pretože váha mäsa v ňom je $\frac{1}{4}$ libry. Konkurenčná sieť A&W začala predávať za rovnakú cenu hamburger, v ktorom váha mäsa bola $\frac{1}{3}$ libry. Medzi zákazníkmi však zostal obľúbenejší hamburger od McDonald's.
Z prieskumov spokojnosti sa ukázalo, že ľudia si za rovnakú cenu radšej kúpili štvrťlibrák.
Odôvodňovali to takto: *„Keďže 4 je viac ako 3, tak aj štvrť libry je viac ako tretina libry, teda výhodnejšia je cena v McDonald's."*

a Ako zákazníkom vysvetlíš, že ich úvaha nie je správna?

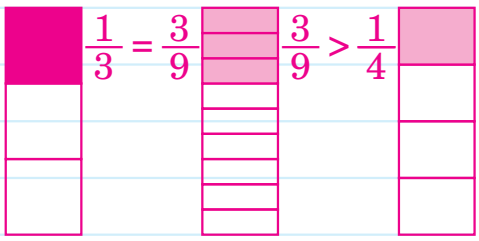
McDonald's z mäsa s hmotnosťou 1 libry spraví 4 hamburgery, A&W spraví 3 hamburgery, čo môžeme ilustrovať na obrázku. Hamburger od McDonald's má menšie množstvo mäsa ako hamburger od A&W.
Preto je výhodnejšie nakupovať hamburger A&W.



McDonald's A&W

b Spoločnosť A&W prišla s riešením predávať tzv. „trojdevätinový burger". Ukáž, prečo platí, že $\frac{3}{9} > \frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \\ \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \end{array}\right\} \frac{4}{12} > \frac{3}{12}$$

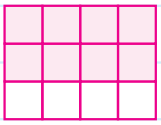


A10 Luciin mladší brat sa čudoval, aké ľahké veci sa Lucia v škole učí, keď videl jej domácu úlohu. *„To zvládne každý šiestak!“* povedal a dopísal jej do zošita riešenie.
Nájdi, kde je chyba, a navrhni, ako by mu mala Lucia vysvetliť, prečo je jeho riešenie chybné.

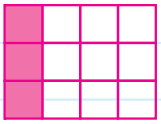
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$$

Chyba: Luciin brat sčítal zvlášť čitatele a zvlášť menovatele. Lucia by mu to mohla vysvetliť napr. na obrázku koláča (Asi by mu mala aj vysvetliť, čo predstavuje zápis $\frac{1}{4}$). Koláč rozdelí vodorovne na tretiny a vertikálne na štvrtiny. Vyfarbí dve tretiny koláča (2 riadky) a k tomu potrebuje ešte vyfarbiť štvrtinu koláča. Tá pozostáva z 3 malých štvorčekov. Spolu je vyfarbených 11 štvorčekov z 12, odpoveď je teda $\frac{11}{12}$.

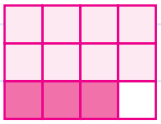
$\frac{2}{3}$



$\frac{1}{4}$

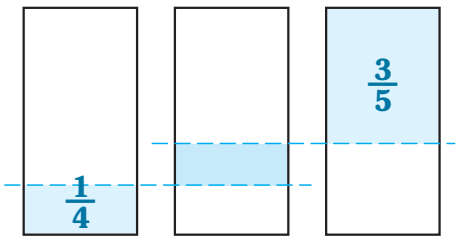


$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$



Mohla by mu to vysvetliť aj tak, že $\frac{2}{3}$ sú viac ako polovica, teda odpoveď musí byť väčšia ako polovica. Jeho odpoveď $\frac{3}{7}$ je však menšia ako polovica.

A11 Žiaci skúmali obrázok s troma zhodnými obdĺžnikmi. Snažili sa zistiť veľkosť vyfarbenej časti prostredného obdĺžnika.



a Kto má pravdu a prečo?

Je to 1 štvrtina, lebo to vyzerá byť rovnaká časť, ako je vyfarbená v prvom obdĺžniku.

Matej

Je to 1 pätina, lebo v treťom obdĺžniku nie sú vyfarbené 2 pätiny a polovica z toho je 1 pätina.

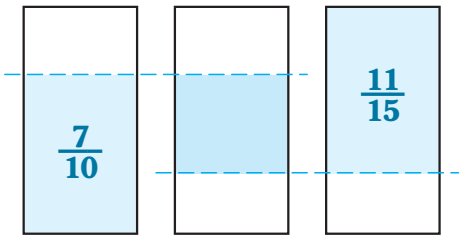
Michal

Ani jeden z vás nemá pravdu, je to menej ako pätina aj ako štvrtina.

Bianka

Bianka má pravdu, lebo vyfarbenú časť v prostrednom obdĺžniku dostaneme tak, že od celku odrátame vyfarbené časti z prvého i tretieho obdĺžnika:
$1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{20}$, čo je menej ako štvrtina i pätina, lebo $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ a $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$.

b Bianka dala Matejovi a Michalovi nový obrázok. Matej tvrdí, že v prostrednom obdĺžniku je vyfarbená väčšia časť ako polovica, Michal tvrdí, že menšia. Kto z nich má pravdu a prečo?



V prvom obdĺžniku nie sú vyfarbené $\frac{3}{10}$, v treťom $\frac{4}{15}$. Tieto nevyfarbené časti tvoria spolu s vyfarbenou časťou v prostrednom obdĺžniku celok, teda 1.
Vyfarbená časť v strednom obdĺžniku je preto
$1 - \frac{3}{10} - \frac{4}{15} = \frac{30 - 9 - 8}{30} = \frac{30 - 17}{30} = \frac{13}{30}$, čo je menej ako polovica.
Pravdu má teda Michal.

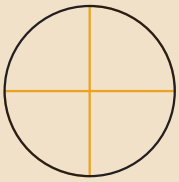
A12 Mama kúpila Tamare na jej narodeninovú oslavu 5 malých okrúhlych koláčov a každý rozkrojila na 5 rovnakých kúskov. Z oslavy zvýšilo spolu 9 kúskov koláča. Tamara a Timur hádajú, koľko zvýšilo. Kto má pravdu? Zdôvodni svoju odpoveď.

Ak si zvyšné kúsky vyfarbíme do obrázka, vidíme, že 5 kúskov spolu tvorí 1 celý koláč a zvyšné 4 kúsky predstavujú $\frac{4}{5}$ druhého koláča. Po oslave teda spolu ostalo $1\frac{4}{5}$ koláča. Pravdu má Tamara. Timurov zlomok predstavuje koláč, ktorý by bol rozdelený na 10 kúskov a 9 z neho by zvýšilo, čo je dokonca menej ako 1 celý koláč.

A13 Vymysli zadanie úlohy, ku ktorému máš hotové riešenie.

a Riešenie

1. Rozdelím celok na štvrtiny.



2. Vyfarbím $\frac{3}{4}$.

3. Jednu z vyfarbených štvrtín vyšrafujem.

4. Výsledok je $\frac{1}{4}$.

Zadanie

Bez kontextu: Vypočítaj: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$. (Urč $\frac{1}{3}$ z $\frac{3}{4}$.)

S kontextom:

Otec objednal veľkú šunkovú pizzu. Kvôli alergii poprosil dať syr len na tri štvrtiny pizze a len na jednu tretinu syrovej časti dať aj olivy. Aká časť celej pizze je syrovo-olivová?

Žiaci môžu prísť s ľubovoľným iným zadaním. Cieľom tejto úlohy je, aby porozumeli, ktorej operácii naznačené riešenie zodpovedá. Túto úlohu odporúčame žiakom zadať až potom, keď už vedia násobiť zlomok zlomkom.

b Riešenie

1. Rozdelím celok na desatiny.

2. Vyfarbím 9 políčok.

3. Z 9 políčok 6 vyšrafujem.

4. Výsledok je $\frac{6}{10}$, čo je viac ako polovica.

Zadanie

Bez kontextu: Čo je viac, $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$ alebo $\frac{1}{2}$?

S kontextom:

Babka nakrájala koláč na 10 rovnakých kúskov. Jednu desatinu koláča zjedla a zvyšok odložila do chladničky. Dedko v noci vyjedal chladničku a nechal tam len tretinu z kúskov, ktoré v nej našiel. Zjedol dedko viac ako polovicu celého koláča?

Podobne ako v úlohe a), ale tu je ešte v poslednom kroku porovnanie, ktoré by nemali žiaci zabudnúť zahrnúť do zadania úlohy.

A14 Traja kamaráti riešili domácu úlohu z matematiky: *O koľko minút sú $\frac{3}{5}$ z $\frac{1}{2}$ hodiny viac ako 5 minút?* Kto počítal správne? Ak niekto počítal nesprávne, vysvetli, prečo je to nesprávne.

Julo

$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \cdot 60 = 50$ minút, $50 - 5 = 45$ minút

René

$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \cdot 60 = 18$ minút, $18 - 5 = 13$ minút

Peťo

polhodina je 30 minút, $\frac{3}{5}$ z 30 je $\frac{3}{5} \cdot 30 = \frac{90}{5} = 18$ minút, $18 - 5 = 13$ minút

Julovo riešenie je nesprávne,
nemôže dostať viac ako 30 minút, lebo $\frac{3}{5}$ je menej ako 1, teda
aj odpoveď je menšia ako celok, čo je v tomto prípade $\frac{1}{2}$ hodiny, teda 30 minút.

Reného výsledok je správny, ale v riešení má nezrovnalosť,
keďže všade píše znak =. Potom to vyzerá tak, akoby $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 18$, čo nie je pravda.
Správne by mal napísať $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 = \frac{3}{10} \cdot 60 = 18$.
Podobná nezrovnalosť je aj v Julovom riešení.

Peťo počítal správne.

A15 Adela si kúpila gumený pelendrek a chcela sa podeliť s kamarátmi.
Najskôr ho prerezala na polovice, potom každú polovicu rozdelila na tretiny
a každú tretinu ešte na štvrtiny. Tak dostala kúsky pelendreku s dĺžkou 2,5 cm.
Aký dlhý bol pelendrek? Svoje riešenie zdôvodni.

Pelendrek si môžeme predstaviť ako úsečku, ktorú rozdelíme
na menšie časti podľa Adelinho postupu (viď obrázok).

V každej tretine každej polovice máme štyri kúsky s dĺžkou 2,5 cm.
Spolu je takýchto kúskov v celom pelendreku $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
Dĺžka pelendreku je preto $24 \cdot 2{,}5 = 60$ cm.

A16 Katka kúpila tri koláčiky. Každý z nich prekrojila na polovicu.

a Koľko mini-koláčikov vzniklo Katke?

6 mini-koláčikov, lebo z každého koláčika urobím dva. Mám ich 3, preto počítam 2 · 3, čo je 6.

b Zapíš túto situáciu matematicky pomocou delenia.

$3 : \frac{1}{2} = 6$ Tri koláčiky sme rozdelili na polovice, dostali sme 6 kúskov.

c Vymysli inú situáciu z bežného života, ktorá zodpovedá danému zápisu. Naformuluj to ako zadanie úlohy a potom ju vyrieš.

$5 : \frac{1}{4} = 20$

Napr.:

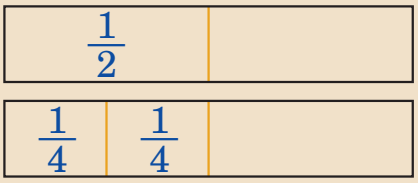
Koľko šnúrok dĺžky štvrtiny metra dostaneme z 5 metrov šnúrky?

A17 Otec vysvetľoval Hanke, ako funguje delenie zlomkov. Ukázal jej to na príklade $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$.

Predstav si tento pásik ako 1 meter látky. Pásik rozstrihneš (rozdelíš) na dve polovice.

Druhý pásik rozstrihneš na 4 štvrtiny.

Chceš vedieť koľko tých štvrtinových kúskov sa ti zmestí do polovice pásika. Teda koľkokrát jedna štvrtina je jedna polovica?

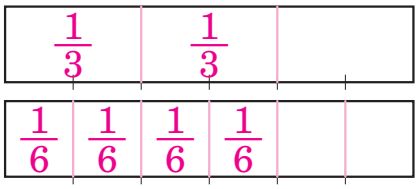


a Čo by mala Hanka odpovedať?

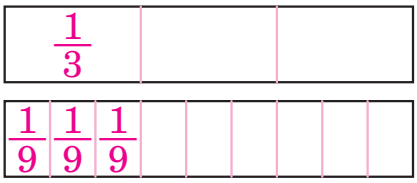
$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

b Vyrieš otcovým spôsobom nasledujúce úlohy.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$

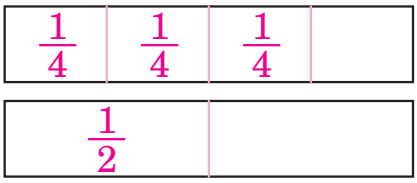


$\frac{1}{3} : \frac{1}{9} = 3$



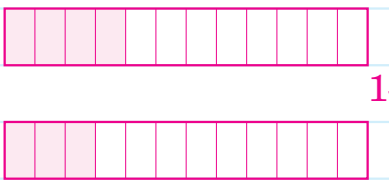
c Otec videl, že to Hanke ide, tak jej dal ťažšiu úlohu a povedal, že teraz výsledok nebude celé číslo. Ako by mala Hanka úlohu vyriešiť? Vysvetli, ako vieš, že tvoje riešenie je správne.

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1{,}5$



Do dvoch štvrtín sa polovica zmestí raz, lebo sú to rovnaké zlomky. Ostala ešte jedna štvrtina a do nej už zmestím len polovicu z polovice, preto je odpoveď 1,5.
Dá sa to ešte overiť násobením: $1{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
alebo 1,5 · 0,5 = 0,75, čo sú tri štvrtiny.

Pri tejto úlohe môžete pre žiakov nachystať pásiky podelené na rovnaké časti (polovice, tretiny, štvrtiny, pätiny, šestiny...).
Vyhnete sa tak nepresnostiam, ktoré môžu viesť k nesprávnym výsledkom.
Prípadne môžete so šikovnými žiakmi diskutovať, či sa tento spôsob dá použiť aj pri riešení úlohy $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, a čo treba urobiť, aby to fungovalo (podeliť pásiky na 12 častí, vyznačiť tretinu a štvrtinu a ukázať, prečo je výsledkom 1 celá a $\frac{1}{3}$).



$1\frac{1}{3}$

A18 Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy. Vysvetli, prečo si to myslíš.

a Tri rovnaké pizze je možné spravodlivo rozdeliť medzi dvoch kamarátov.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo všetky rozdelím na polovicu a obaja si vezmú tri polovice. Alebo obom dám 1 pizzu a tretiu rozdelím na polovicu, takže každý dostane 1,5 pizze.

b Päť kamarátov si môže spravodlivo rozdeliť 4 rovnaké pizze.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo ak každú pizzu rozdelíme na pätiny, každý dostane $\frac{4}{5}$ pizze.

c Zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5}$ vyjadrujú to isté množstvo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo $\frac{4}{5}$ sú viac, čo sa dá ukázať takto: $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$; $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$, preto $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$.

d Zlomky $\frac{12}{26}$ a $\frac{6}{13}$ vyjadrujú to isté množstvo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo ak prvý zlomok vykrátime dvojkou, dostaneme druhý.

e Súčin dvoch zlomkov je väčší ako prvý činiteľ.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{3}$, čo je viac ako $\frac{2}{3}$, ale $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$, čo je menej ako $\frac{2}{3}$.

f Podiel dvoch zlomkov je menšie číslo ako delenec.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$, čo je viac ako $\frac{3}{4}$, a $\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, čo je menej ako $\frac{3}{4}$.

Pri tvrdeniach e) a f) je naším zámerom viesť žiakov k pochopeniu pravdivostnej hodnoty tvrdení. Tie sú v matematike buď pravdivé, alebo nepravdivé. Upozornením na to, že tieto tvrdenia platia len niekedy a nájdením kontrapríkladu budujeme porozumenie, že tieto tvrdenia by pri určovaní pravdivosti neboli pravdivé.

g $\frac{4}{5}$ sú viac ako $\frac{4}{9}$.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo $\frac{4}{5}$ sú skoro 1, ale $\frac{4}{9}$ sú menej než polovica.

h $\frac{7}{3}$ je menej ako $\frac{7}{15}$.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo $\frac{7}{3}$ je viac ako 1 a $\frac{7}{15}$ je menej ako 1.

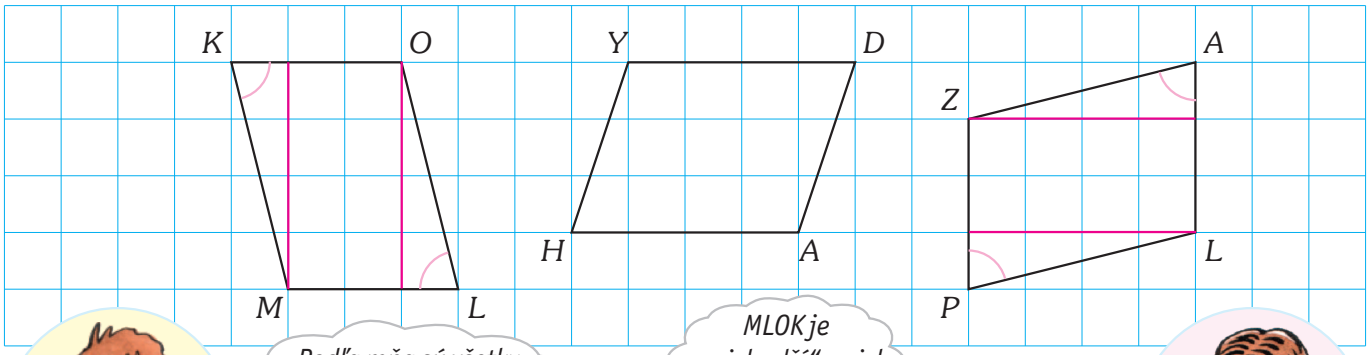
i $\frac{1}{5}$ je viac ako $\frac{7}{10}$.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo $\frac{1}{5}$ je menej ako polovica a $\frac{7}{10}$ je viac ako polovica.

2 Rovnobežníky a ich konštrukcie

A1 Miro a Katka sa nevedeli dohodnúť na tom, či sú niektoré rovnobežníky na obrázku rovnaké alebo nie. Rozhodni, kto z nich má pravdu.



Miro

Podľa mňa sú všetky rovnaké, len inak pootáčané. Spočítaj si štvorčeky – jedna strana zaberá vždy 3 štvorčeky a druhá 4 štvorčeky.

MLOK je „najchudší" z nich a aj najdlhší.

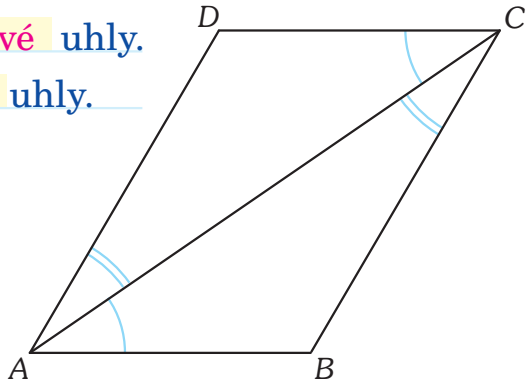
HADY a PLAZ sú úplne inak šikmé, tie nemôžu byť rovnaké. Nepotrebujem nič počítať.

Katka

Ani jeden z nich nemá pravdu.
Rovnobežníky *MLOK* a *PLAZ* majú naozaj jednu dvojicu strán dlhú 3 strany štvorčeka (*ML* a *KO*, *PZ* a *AL*). Strany *LO* a *MK* (rovnako ako *PL* a *ZA*) sú uhlopriečkami obdĺžnikov s rozmermi 1 × 4, teda majú rovnakú dĺžku. Navyše, tieto rovnobežníky majú aj rovnaké uhly, lebo pozostávajú zo zhodných trojuholníkov. Preto sú to rovnaké útvary.
Rovnobežník *HADY* má jednu stranu (*HA*) dlhú 4 strany štvorčeka, čo nemá ani jeden z rovnobežníkov *MLOK* a *PLAZ* (lebo strany *AZ* a *MK* sú dlhšie ako 4 strany štvorca, keďže sú to uhlopriečky obdĺžnika 1×4), preto nie je s nimi rovnaký.

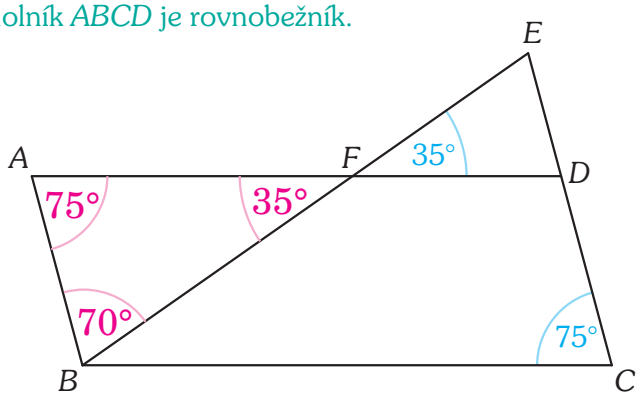
A2 Doplň Monikine tvrdenia o uhloch v rovnobežníku *ABCD* tak, aby boli správne.

Uhly *DCA* a *CAB* sú zhodné, lebo sú to striedavé uhly.
Uhly *DAC* a *ACB* sú zhodné, lebo sú to striedavé uhly.
Uhly *DAB* a *DCB* sú zhodné, lebo oba pozostávajú z dvoch rovnako veľkých uhlov.
Uhly *ADC* a *ABC* sú tiež zhodné.
Protiľahlé uhly v ľubovoľnom rovnobežníku sú teda vždy zhodné.



Žiakom môžete zadať dodatočnú úlohu, aby zdôvodnili, prečo sú uhly ADC a ABC zhodné.

A3 Urč veľkosť uhla *ABF* na obrázku, ak vieš, že štvoruholník *ABCD* je rovnobežník. Doplň chýbajúci text v riešení úlohy.



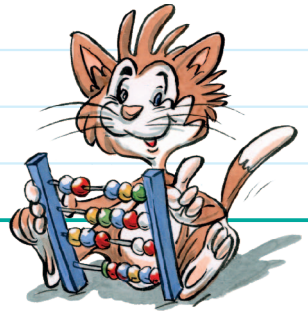
Riešenie:

Uhol *AFB* má veľkosť 35 °, lebo je to vrcholový uhol k uhlu *EFD*.

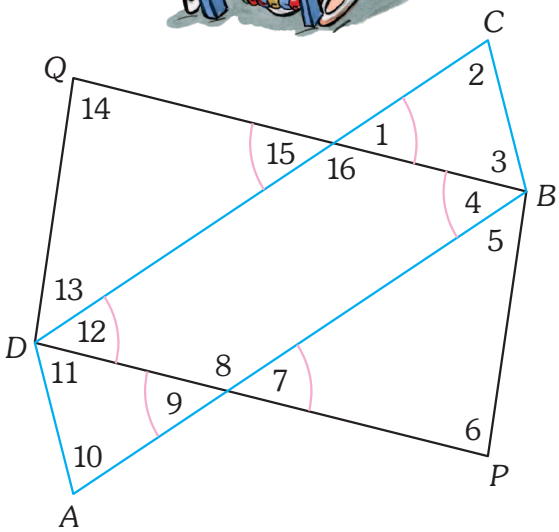
Uhol *DAB* má veľkosť 75 °, lebo protiľahlé uhly v rovnobežníku sú zhodné a z obrázka vieme, že veľkosť uhla *DCB* je 75°.

Súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180 °, preto veľkosť uhla *ABF* vypočítame ako

180° – 35° – 75 ° = 180° – 110° = 70 °.



A4 Štvoruholníky *ABCD* a *DPBQ* na obrázku sú rovnobežníky. Šimon tvrdí, že na obrázku je ešte päť takých uhlov, ktoré majú rovnakú veľkosť ako uhol označený číslom 1. Pán učiteľ povedal, že jeho odpoveď je správna, ale chýba mu zdôvodnenie. Ako by mal Šimon svoju odpoveď zdôvodniť?



- Uhol číslo 15 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 1, lebo ide o vrcholové uhly.
- Uhol číslo 12 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 1, lebo ide o súhlasné uhly.
- Uhol číslo 4 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 1, lebo ide o striedavé uhly.
- Uhol číslo 7 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 4, lebo ide o striedavé uhly. Potom aj uhol číslo 7 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 1.
- Uhol číslo 9 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 7, lebo ide o vrcholové uhly. Potom aj uhol číslo 9 má rovnakú veľkosť ako uhol číslo 1.
- Iné zhodné uhly s uhlom číslo 1 už na obrázku nie sú, ak nemáme ďalšie informácie.

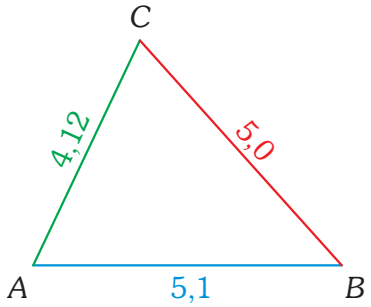
Žiaci môžu uviesť aj iné zdôvodnenia, napr. uhly číslo 12 a 15 sú striedavé, preto je 12 zhodné s 1. So žiakmi môžete viesť aj diskusiu, či by tých uhlov nebolo viac, keby napr. trojuholník s uhlami 13, 14 a 15 bol rovnoramenný.

A5 K vrcholom trojuholníka *ABC* pridaj vrchol *D* tak, aby vznikol rovnobežník. Nájdi čo najviac riešení.

a Posúď Emin a Marekov návrh riešenia.

Ema: „To je predsa jednoduché. Stačí preklopiť trojuholník okolo jednej strany a vznikne rovnobežník. Keďže trojuholník má 3 rôzne strany, tak máme tri rôzne preklopenia a teda 3 rôzne rovnobežníky.“

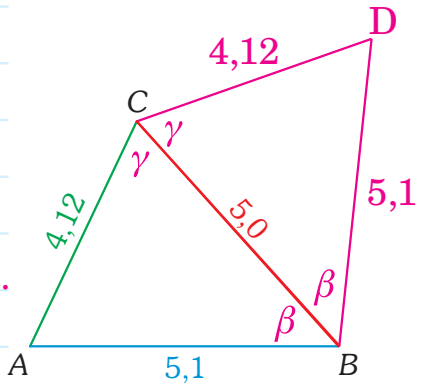
Marek: „Nezískame 3 rôzne rovnobežníky. Keď sa preklápa ten istý trojuholník, tak budú všetky tie rovnobežníky rovnaké, len inak otočené.“



Ak by sme trojuholník preklápali tak, ako navrhuje Ema, vznikol by štvoruholník, ale nebol by to rovnobežník. Napr. preklopením okolo strany *BC* by vznikli dve zhodné dvojice susedných strán – *AC, CD* a *AB, BD*. V rovnobežníku sú však zhodné strany protiľahlé, nie susedné. Ema nemá pravdu.

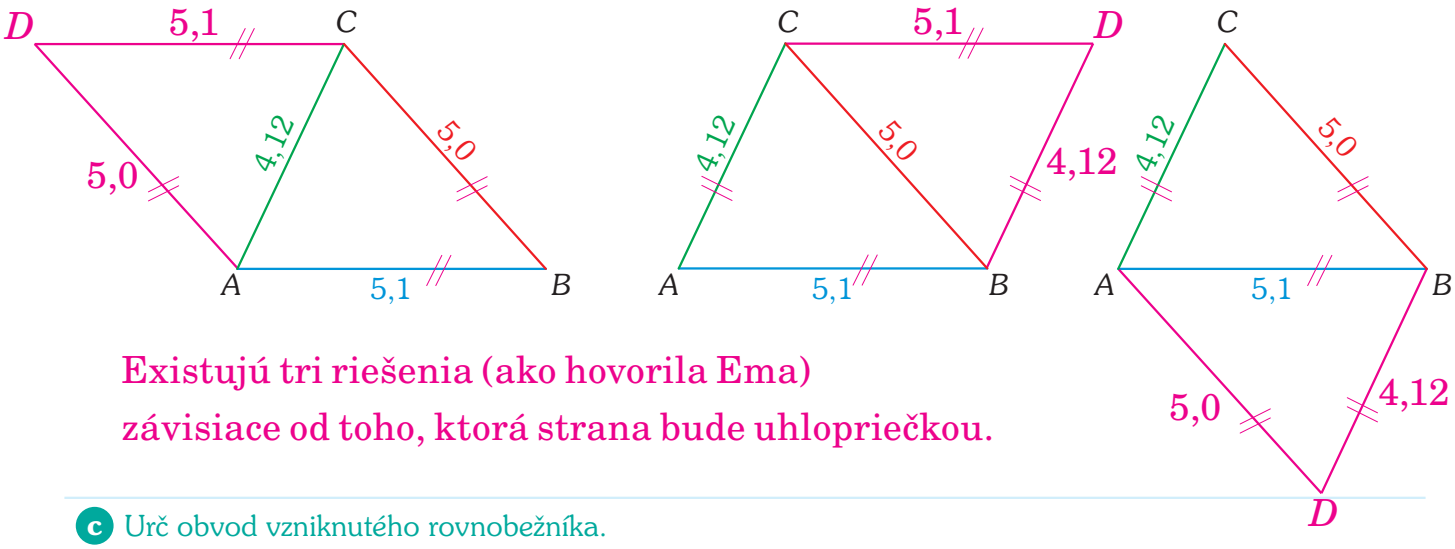
Preklopením okolo *BC* vznikne štvoruholník so stranami dĺžky 5,1; 5,1; 4,12 a 4,12; pričom preklopením okolo *AC* vznikne štvoruholník so stranami dĺžky 5; 5; 5,1 a 5,1. Vzniknuté štvoruholníky sú teda rôzne. Navyše, nie sú to rovnobežníky.

Marek, uvažujúci o Eminom postupe, nemá pravdu.



b Navrhni spôsob, ako nájsť vrchol *D*. Vysvetli, prečo je tvoje riešenie správne.

Vrchol *D* nájdeme tak, že dvoma vrcholmi trojuholníka (napr. *A* a *C*) budeme viesť rovnobežku s protiľahlou stranou, lebo protiľahlé strany rovnobežníka sú rovnobežné. Priesečník rovnobežiek bude bod *D*.



Existujú tri riešenia (ako hovorila Ema) závisiace od toho, ktorá strana bude uhlopriečkou.

c Urč obvod vzniknutého rovnobežníka.

Ak je uhlopriečkou rovnobežníka *BC*, obvod bude $o = 2 \cdot (5{,}1 + 4{,}12) = 18{,}44$.

Ak je uhlopriečkou rovnobežníka *AB*, obvod bude $o = 2 \cdot (5 + 4{,}12) = 18{,}24$.

Ak je uhlopriečkou rovnobežníka *AC*, obvod bude $o = 2 \cdot (5{,}1 + 5) = 20{,}2$.

3 Percentá

A1 V bežnej konverzácii často používame vyjadrenia súvisiace s percentami.
Aký je ich presný matematický význam?
Sú tieto vyjadrenia pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy? Zdôvodni.

a Mobil *„nabitý na 36 %“* vydrží dlhšie ako mobil *„nabitý na 29 %“*?

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

„Nabitý na 36 %“ znamená, že z celkovej energie batérie (100 %) už máme k dispozícii iba 36 % energie.

Lebo mobil nabitý na 36 % nemusí vydržať funkčný dlhšie ako mobil nabitý na 29 %, pretože kapacita batérií mobilov môže byť rôzna, resp. rýchlosť vybitia môže ovplyvniť iná miera používania mobilu v danom okamihu.

b Ak Oliver *„napísal test na 63 %“*, tak urobil viac chýb ako Tomáš, ktorý *„napísal ten istý test na 85 %“*.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

„Napísal test na 63 %“ znamená, že z celkového počtu bodov získal 63 % bodov.

Lebo ak Oliver získal 63 % percent všetkých bodov a Tomáš 85 % všetkých bodov, tak Oliver naozaj urobil viac chýb (stratil viac bodov) ako Tomáš.

c Ak Zita *„kúpila tenisky so zľavou 50 %“*, tak ušetrila viac ako Natália, ktorá *„kúpila tenisky so zľavou 30 %“*.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

„Kúpila tenisky so zľavou 50 %“ znamená, že z celkovej ceny tenisiek dostala zľavu v hodnote 50 % z pôvodnej ceny.

Lebo to záleží na cene pred zľavou.
Na to, aby sme vedeli porovnať, kto viac ušetril, by sme museli poznať konkrétne ceny kúpených tenisiek, prípadne či ide o tie isté tenisky.

A2 Milka si chce kúpiť šaty so zľavou 25 %. Nevie si však vypočítať, koľko eur je zľava. Kto z rodiny je radí správne? Vysvetli prečo.

Starká: *Zľavu vypočítaš tak, že celkovú sumu vydelíš 4.*

Sestra: *Vynásob cenu šiat číslom 0,25 a máš to.*

Otec: *Cenu šiat vydeľ 100 a potom výsledok vynásob 25.*

Správne jej radia všetci – každý z nich uvádza iba iný spôsob výpočtu.

Starká:
Celá suma je 100 %, zľava je 25 %. 25 je štvrtina zo 100, preto na výpočet zľavy stačí zistiť štvrtinu z celkovej sumy šiat (t. j. celok delené 4).

Sestra: Celá suma je 100 %.
Jedno percento je stotina z celku, čiže 0,01 z celej sumy.
25 % je 25 stotín z celku, čiže 0,25 z celej sumy (t. j. 0,25-krát suma šiat).

Otec: Celá suma je 100 %, t. j. akoby 100 rovnakých dielikov, preto delené 100.
Každý dielik zodpovedá jednému percentu.
Ak chceme 25 percent/dielikov, treba výsledok vynásobiť 25.

A3 Klára a Miloš mali vypočítať 5 % z daného čísla.

Dané číslo som vydelila číslom 20, lebo 5 % je to isté ako jedna dvadsatina.

Najprv som vypočítal jedno percento vydelením čísla stovkou.

Potom som výsledok vynásobil piatimi.

a Kto podľa teba počítal správne? Svoju odpoveď zdôvodni.

Obaja počítali správne, len iným spôsobom.

Klára použila to, že 5 % je $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$,

Miloš to, že 5 % je $\frac{5}{100} = 5 \cdot \frac{1}{100}$.

b Čia metóda je podľa teba efektívnejšia a prečo?

Žiaci môžu uviesť svoje stanovisko, efektívnosť v tomto prípade závisí od daného čísla.
Ak je ľahko deliteľné dvadsiatimi, t. j. ide o násobok 20 (prípadne 10),
tak Klára vykoná len jednu operáciu.
Inak je Milošovo riešenie pravdepodobne rýchlejšie a použiteľné univerzálne.

A4 Na domácu úlohu mali žiaci vypočítať 60 % z daného čísla. Na druhý deň si porovnávali svoje postupy.

Miloš: „Najprv som vypočítal jedno percento vydelením čísla stovkou a potom som výsledok vynásobil 60.“

Rebeka: „Ja som najprv vypočítala 10 %, teda jednu desatinu a potom som k tomu pridala 50 %, teda polovicu z toho čísla.“

Veronika: „Ja som tiež najprv vypočítala 10 % vydelením desiatkou. Potom som výsledok vynásobila 6.“

a Kto to podľa teba počítal správne? Svoju odpoveď zdôvodni.

Všetci to počítali správne, len iným spôsobom:

Miloš využil to, že 60 % je $\frac{60}{100} = 60 \cdot \frac{1}{100}$.

Rebeka využila to, že 60 % = 10 % + 50 %, že 50 % je $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, a tiež to, že 10 % je $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Veronika využila to, že 60 % je $\frac{60}{100} = 6 \cdot \frac{10}{100} = 6 \cdot \frac{1}{10}$.

b Pani učiteľka povedala, že sa to dá vypočítať ešte aj inak? Ako?

Napr. tak, že dané číslo vynásobíme číslom 0,6.

A5 Sofia vymýšľala matematické úlohy s kartami. Vybrala si 3 čísla a napísala ich na rôznofarebné karty.

a Karty otočila číslami nadol a povedala: $\frac{1}{2}$ z čísla na červenej karte je číslo na modrej karte.

25 % z čísla na modrej karte je číslo na zelenej karte.

Ak je na červenej karte číslo 52, ktoré číslo je na zelenej karte?

52	26	6,5

Ak je na červenej karte 52, potom polovica z 52 (teda 26) je na modrej karte. 25 % predstavuje jednu štvrtinu. Jedna štvrtina z 26 je 6,5. Preto je na zelenej karte číslo 6,5.

b Vymyslela ďalšiu úlohu a povedala: 25 % z čísla na červenej karte je číslo na modrej karte.

$\frac{1}{5}$ z čísla na modrej karte je číslo na zelenej karte.

10 % z čísla na zelenej karte je číslo 7.

Urč súčet čísel na červenej a zelenej karte.

1 400	350	70

- Ak je 10 % z čísla na zelenej karte číslo 7, potom je na zelenej karte číslo 10-krát väčšie, lebo 10 % je desatina zo 100 %. Na zelenej karte je teda číslo 70.
- Ak je pätina z čísla na modrej karte číslo 70, potom číslo na modrej karte musí byť päťkrát väčšie ako 70. Je to číslo 350. 25 % predstavuje jednu štvrtinu.
- Ak je štvrtina z čísla na červenej karte 350, potom číslo na červenej karte musí byť 4-krát väčšie ako 350. Je to číslo 1 400. Súčet čísel na červenej a zelenej karte je 1 400 + 70 = 1 470.

A6 Vyrieš úlohy, odpovedz na otázky a doplň text.

a Vypočítaj dvoma rôznymi spôsobmi 35 % zo 60.

$60 : 100 = 0{,}6$ $\quad$ $60 \cdot 0{,}35 = 21$

$0{,}6 \cdot 35 = 21$

b Použi svoje dva spôsoby na výpočet 60 % z 35.

$35 : 100 = 0{,}35$ $\quad$ $35 \cdot 0{,}6 = 21$

$0{,}35 \cdot 60 = 21$

c Čo si všimneš na výsledkoch?

Výsledky sú rovnaké v oboch prípadoch.

d Over, či to platí aj pre 45 % z 28 a pre 28 % zo 45.

$0{,}45 \cdot 28 = 12{,}6$ $\quad$ $0{,}28 \cdot 45 = 12{,}6$

Áno, platí.

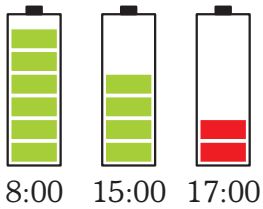
e Vyber si ľubovoľnú dvojicu prirodzených čísel a over to na nej. Porovnajte si výsledky v triede.

____ % z ____ $\quad$ ____ % z ____

f Doplň všeobecné tvrdenie opisujúce túto situáciu.

Ak sú A a B ľubovoľné prirodzené čísla, výsledok výpočtu A % z čísla B je taký istý ako B % z čísla A.

A7 Na obrázkoch je znázornený stav nabitia Filipovej batérie v mobile počas dňa. Predpokladaj, že batéria sa vybíja stále rovnakou rýchlosťou.



Urč približne, koľko percent energie mal Filip ešte k dispozícii o 15:00 a o 17:00, ak o 8:00 bola batéria nabitá na 95 %. Svoju odpoveď zdôvodni.

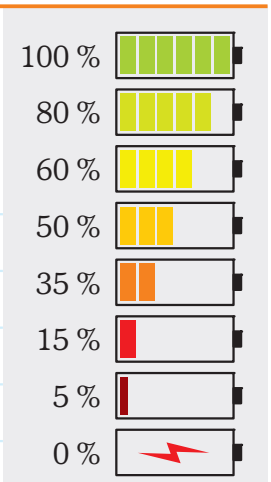
95 % energie predstavuje 6 dielikov, preto 1 dielik je 95 : 6 = 15,83 %, teda približne 15 %.

O 15:00 mal Filip ešte 4 dieliky, teda približne 15 · 4 = 60 % energie.

O 17:00 mal už len 2 dieliky, teda približne 15 · 2 = 30 % energie.

Zaokrúhlenie 15,83 % nadol na 15 % robíme kvôli jednoduchosti výpočtov (ktoré sú všetky aj tak iba približné). Žiaci môžu zaokrúhľovať matematicky.

A8 Babka si čítala návod k novému mobilu a snažila sa pochopiť obrázok vysvetľujúci, na koľko percent je mobil nabitý pri jednotlivých ikonkách. Babka po čase vraví: *„Čo sa tí inžinieri zbláznili, keď už nevedia ani do 100 napočítať? Veď je to celé zle!“* Má babka pravdu? Svoju odpoveď zdôvodni.



Má pravdu. Keby jeden dielik predstavoval 20 % (po 1 dieliku ubudlo zo 100 % na 80 % i z 80 % na 60 %), tak by na ikonke predstavujúcej 100 % malo byť spolu 5 dielikov, nie 6. Ďalšia nezrovnalosť je pri ikonkách zo 60 % na 50 %, keď ubudol 1 dielik – v tomto prípade dielik predstavoval zrazu len 10 %. Pri prechode z 50 % na 35 % jeden dielik predstavuje 15 %, z 35 % na 15 % zase 20 %. Aby bol obrázok zrozumiteľný, jeden dielik by mal vždy predstavovať tú istú hodnotu.

A9 Doplň zdôvodnené riešenie úloh tak, aby boli správne.

a O koľko percent je číslo 50 väčšie ako číslo 40?

Číslo 50 je o 10 väčšie ako číslo 40 .
Číslo 10 predstavuje jednu štvrtinu zo základu, ktorým je číslo 40.
Preto je číslo 50 o 25 % väčšie ako 40.

b O koľko percent je číslo 40 menšie ako číslo 50?

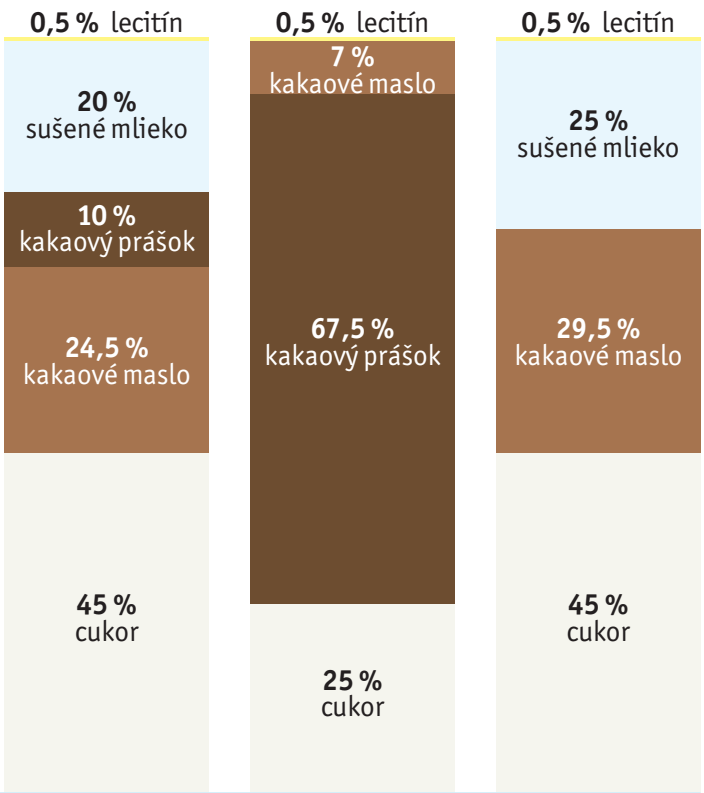
Číslo 40 je o 10 menšie ako číslo 50.
Číslo 10 predstavuje jednu pätinu zo základu, ktorým je číslo 50.
Preto je číslo 40 o 20 % menšie ako 50.

c Zovšeobecni zistenia z úloh a) a b).

Ak je číslo A väčšie od čísla B o x %, **neznamená** to, že číslo B je o x % menšie ako číslo A .

A10 Adelka a Jurko boli v múzeu čokolády. Na troch diagramoch videli znázornené zloženie mliečnej, horkej a bielej čokolády.

Rozhodni, ktoré tvrdenia sú pravdivé, ak by si kúpili 100-gramové čokolády zodpovedajúce týmto modelom. Ak je tvrdenie nepravdivé, vysvetli prečo.



1. Viac ako polovicu horkej čokolády tvorí kakaový prášok.

pravda – **nepravda**

2. Štvrtina horkej čokolády je cukor.

pravda – **nepravda**

3. Mliečna čokoláda obsahuje 5 g sušeného mlieka a 45 g cukru.

pravda – **nepravda** Nie je to pravda, lebo 100-gramová mliečna čokoláda obsahuje 20 g sušeného mlieka.

4. Kakaové maslo tvorí menej ako štvrtinu bielej čokolády.

pravda – **nepravda** Nie je to pravda, lebo biela čokoláda obsahuje 29,5 % kakaového masla, čo je viac ako 25 %, teda viac ako štvrtina.

5. Horká čokoláda obsahuje 7 g kakaového masla.

pravda – **nepravda**

A11 V múzeu čokolády videli Adelka a Jurko aj informačný leták o kakaových zrnách, ktoré obsahujú dôležité, zdraviu prospešné látky. Adelka a Jurko tvrdia, že v ňom našli chybu, otec in oponoval. Čo si myslíš ty? Svoju odpoveď zdôvodni.

Jurko: „Je v ňom chyba, pretože pri kakaovom masle, ktorého je 54 %, nemôžu kyseliny, ktoré maslo vytvárajú, prevyšovať 54 %.“

Adelka: „Chyba je pri sacharidoch, pretože tam chýba údaj o ďalších 14 %.“

Otec: „Z matematického hľadiska tam chybu nevidím.“

Čo je v kakaovom zrnku?

54 % TUKY (kakaové maslo)
34 % kyselina olejová
33 % kyselina stearová
26 % kyselina palmitová
6 % iné

31 % SACHARIDY
z toho
1 % cukry
16 % vláknina

11 % PROTEÍNY
arginín, glutamín, leucín

3 % POLYFENOLY
flavanoidy, proaktokyanidíny

< 1 % MINERÁLNE LÁTKY
železo, mangán, fosfor, draslík, meď

Jurkovo tvrdenie nie je správne, pretože údaj 54 % (kakaové maslo) berieme ako základ (100 %), ktorý sa skladá z jednotlivých kyselín.
Adelka má pravdu v tom, že tam chýba údaj. Mohol by tam byť doplnený údaj o zvyšných 14 %, no možno je tých zložiek priveľa a bolo by nepraktické vypísať ich všetky.
Otec si pravdepodobne nevšimol, že súčet percent všetkých zložiek kakaového masla nie je 100 %, lebo minerálnych látok je menej ako 1 %. Buď tam nejaká zložka chýba, alebo je niektorý údaj chybný, alebo sú údaje na letáku uvedené iba približne (napr. len celé percentá, a keby sme sčítali aj ich desatinné časti, dostali by sme 100 %).

So žiakmi môžete diskutovať, ktoré vysvetlenie je pravdepodobnejšie.

A12 Cez víkend bola v butiku akcia **ZĽAVA 20 % NA VŠETKO**.

a Vypočítaj cenu tovaru cez víkend.

Tovar	Predvíkendová cena	Víkendová cena	Povíkendová cena
Tričko	8,50 €	8,50 · 0,8 = 6,80 €	6,80 · 1,2 = 8,16 €
Nohavice	16,00 €	16 · 0,8 = 12,80 €	12,80 · 1,2 = 15,36 €
Šaty	22,00 €	22 · 0,8 = 17,60 €	17,60 · 1,2 = 21,12 €
Šortky	10,50 €	10,50 · 0,8 = 8,40 €	8,40 · 1,2 = 10,08 €

b V pondelok majiteľ povedal predavačke, aby zvýšila víkendové ceny o 20 %. Vypočítaj cenu tovaru v pondelok.

c Keď majiteľ uvidel nové cenovky, povedal predavačke: *„To čo sú za ceny? Prečo nie sú rovnaké ako pred víkendom?“* Ako by mala predavačka majiteľovi vysvetliť, prečo nie sú ceny rovnaké?

Ak chcel mať majiteľ rovnaké ceny, mal predavačke povedať, aby ich vrátila na také ako pred víkendom. To, že niečo zlacnie o 20 %, neznamená, že po navýšení o 20 % bude mať rovnakú cenu, pretože sa zmenil základ.
Ak niečo stálo 100 eur, po 20 % zľave to stojí 80 eur.
Ak to potom zdražíme o 20 %, zdražujeme zo základu 80 eur, kde 10 % je 8 eur; 20 % bude teda 16 eur a nie 20 eur.
Preto nedostaneme naspäť cenu 100 eur, ale len 96 eur.

Ak by sme chceli opísať zvýšenie na pôvodnú cenu pomocou percent, bolo by to zvýšenie o 25 % (pozri tiež úlohu A9).

A13 Tvrdenia I a II sú niekedy pravdivé a niekedy nepravdivé. Doplň text tak, aby zodpovedal jednotlivým prípadom.

I **Ak mixér Philip stojí o 10 % viac ako mixér Eluxtro, tak mixér Eluxtro stojí o 10 eur menej ako mixér Philip.**

II **Ak mixér Philip stojí o 10 % viac ako mixér Eluxtro, tak mixér Philip stojí o 20 eur viac ako mixér Eluxtro.**

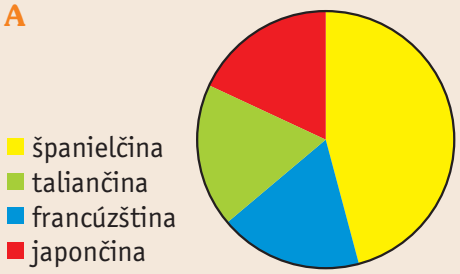
Tvrdenie **I** je **pravdivé** v prípade, ak by mixér Eluxtro stál 100 eur.
Potom by mixér Philip stál 110 eur (o 10 % viac)
a Eluxtro by bol o 10 eur lacnejší.

Tvrdenie **II** je **pravdivé** v prípade, ak by mixér Eluxtro stál 200 eur.
Potom by mixér Philip stál 220 eur (o 10 % viac)
a Philip by bol o 20 eur drahší.

Tvrdenia **I** a **II** sú **nepravdivé** napr. v prípade, ak by mixér Eluxtro stál 50 eur.
Potom by mixér Philip stál 55 eur (o 10 % viac), ale Eluxtro by
nebol o 10 eur lacnejší, ani Philip by nebol o 20 eur drahší.

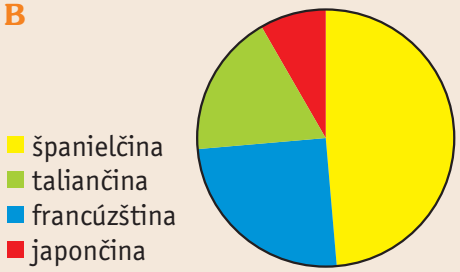
A14 Žiaci 7. B odpovedali na otázku, ktorý cudzí jazyk by sa chceli v budúcnosti naučiť. Každý žiak uviedol jeden cudzí jazyk. 49 % uviedlo španielčinu, 25 % francúzštinu, 18 % taliančinu a 8 % japončinu. Ktorý z kruhových diagramov správne znázorňuje prehľad odpovedí žiakov? Svoju odpoveď zdôvodni.

A



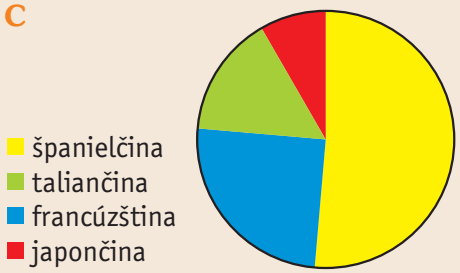
V diagrame A
vyzerajú byť ostatné 3 jazyky rovnako zastúpené,
pričom japončinu si vybralo len 8 % žiakov,
preto by červená časť (japončina) mala byť
ešte menšia ako polovica zo zelenej (taliančina).
Preto diagram A vylúčime.

B



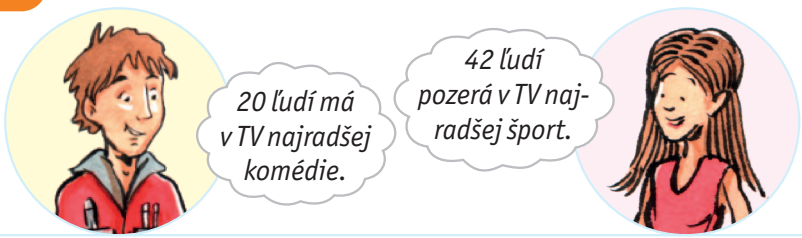
Správny diagram je B.

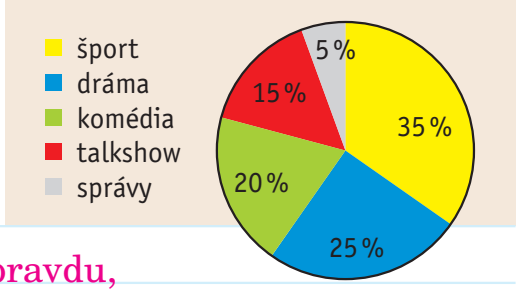
C



V diagrame C
zodpovedá španielčine väčšia časť ako polovica,
pričom si ju vybralo len 49 %,
preto diagram C vylúčime.

A15 V prieskume odpovedalo 120 ľudí na otázku, ktorý je ich najobľúbenejší typ televízneho programu.





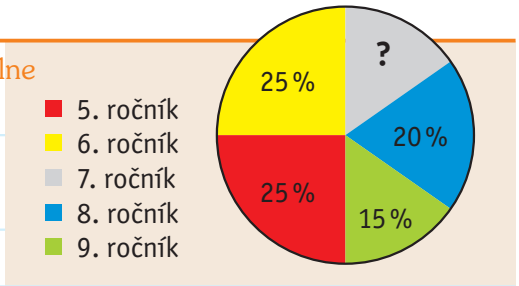
a Má pravdu Marek alebo Miška? Prečo?

Marek nemá pravdu, lebo komédiu má najradšej 20 % ľudí a nie 20 ľudí. 20 % zo 120 je 24. Miška má pravdu, lebo šport má najradšej 35 % ľudí a 120 · 0,35 = 42.

b Doplň tvrdenia tak, aby boli správne.

Šport má v TV najradšej 7 -krát viac opýtaných ako tých, ktorí odpovedali, že majú najradšej správy. Drámu sleduje najradšej štvrtina opýtaných a komédiu pätina. Talkshow alebo šport mala najradšej polovica opýtaných ľudí.

A16 Škola má spolu 180 žiakov v 5. až 9. ročníku. Ich percentuálne rozdelenie je znázornené v kruhovom diagrame.

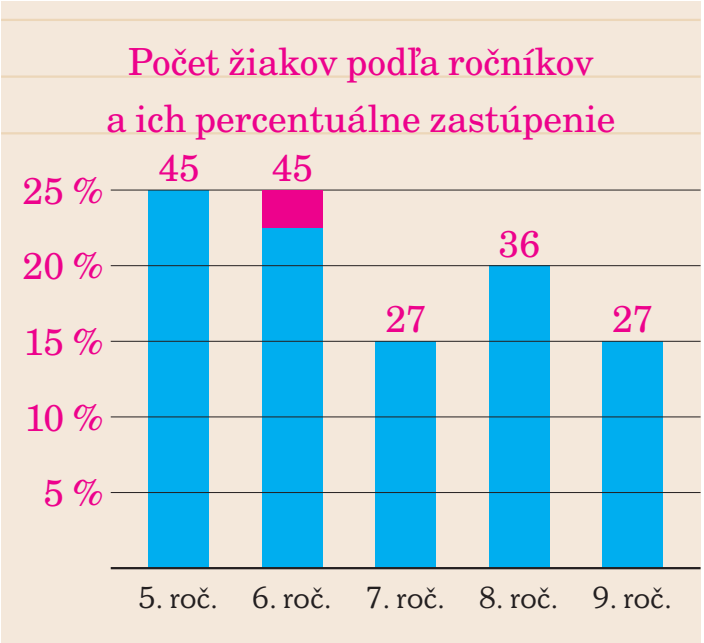


a Koľko percent žiakov školy je v 7. ročníku? Vysvetli, ako vieš, že tvoja odpoveď je správna.

Všetkých žiakov je 100 %, v diagrame je znázornených 20 % + 15 % + 25 % + 25 % = 85 %, preto chýbajúce percento vyjadrujúce počet žiakov v 7. ročníku je 100 % – 85 % = 15 %.

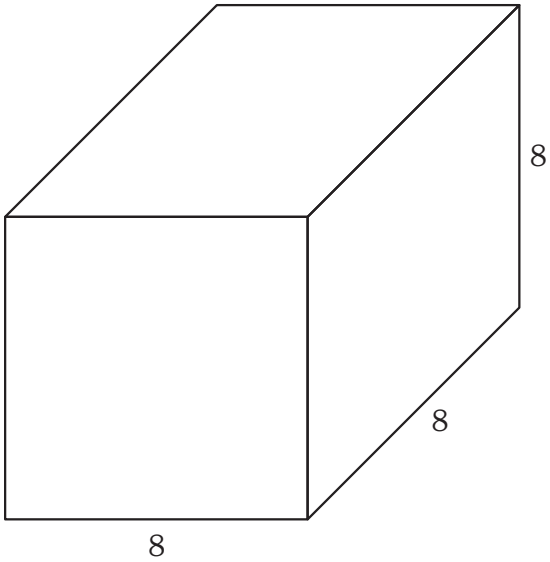
b Zástupkyňa tejto školy pripravila v rámci prezentácie pre rodičov stĺpcový diagram, ktorý znázorňoval počet žiakov v jednotlivých ročníkoch. Riaditeľka sa na diagram zapozerala a po 2 sekundách povedala: *„Hmm, tu si sa pomýlila. Oprav to, prosím ťa, a tiež sprav tú snímku zrozumiteľnejšou.“* Pomôž zástupkyni upraviť snímku a vysvetli, prečo úprava robí snímku zrozumiteľnejšou.

Počet žiakov v 5. a 6. ročníku by mal byť rovnaký, lebo ich percentá v diagrame sú rovnaké. Zástupkyňa by mala pridať aj názov diagramu a tiež aj počet žiakov (nad každý stĺpec) alebo zvislú os s hodnotami 5, 10, 15, 20..., aby bolo zrejmé, čo diagram znázorňuje a koľko žiakov je v jednotlivých ročníkoch.

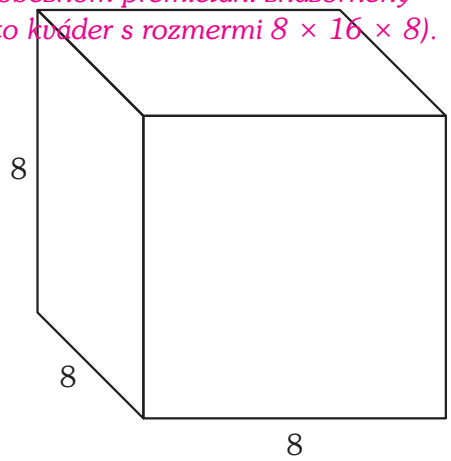


4 Voľné rovnobežné premietanie

A1 Na ktorom obrázku je správne zobrazená kocka s rozmermi 8×8×8 vo voľnom rovnobežnom premietaní? Svoju odpoveď zdôvodni.

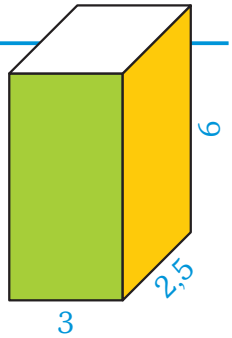


Žiakom môžete ešte položiť otázku, ktorý útvar je v skutočnosti vo voľnom rovnobežnom premietaní znázornený na obrázku vľavo (je to kváder s rozmermi 8 × 16 × 8).



Pri voľnom rovnobežnom premietaní zobrazujeme bočné hrany s polovičnou dĺžkou, ako je ich skutočná dĺžka. Preto je správny obrázok ten vpravo.

A2 Na obrázku je narysovaný kváder vo voľnom rovnobežnom premietaní. Protiľahlé steny majú rovnaké farby. Na obrázku sú uvedené rozmery konštrukcie v rovine, nie priestorové rozmery kvádra.

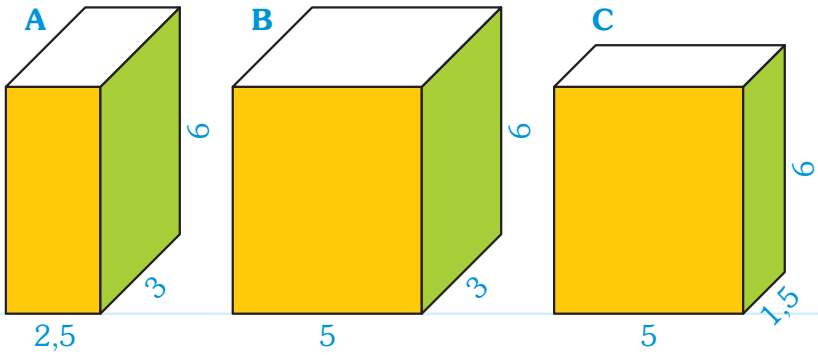


a Aké sú skutočné rozmery kvádra?

Rozmery prednej steny v náryse sú skutočné, teda 6 a 3. Bočná hrana má v skutočnosti v priestore dvojnásobnú dĺžku, teda 2,5 · 2 = 5. Skutočné rozmery kvádra sú teda 3 × 5 × 6.

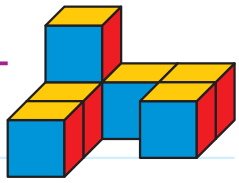
b Kváder následne otočíme tak, že jeho žltá stena bude smerovať smerom dopredu (k nám). Ktorý z obrázkov A, B, C správne zobrazuje kváder vo voľnom rovnobežnom premietaní po otočení?

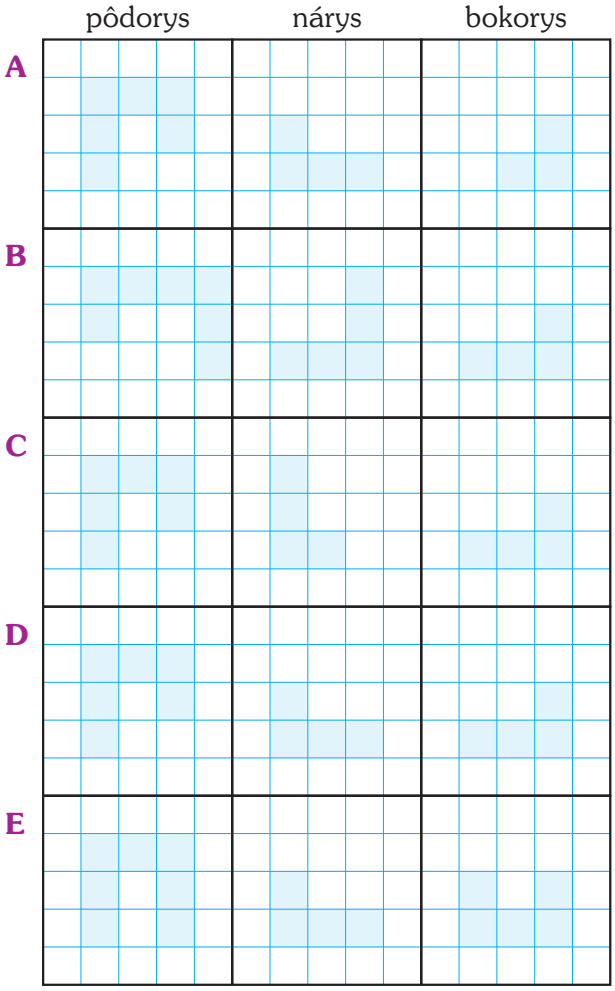
Správne znázornenie kvádra je na obrázku C. Skutočná dĺžka podstavnej hrany žltej steny je 5 (viď zadanie a)). Dĺžka podstavnej hrany zelenej steny sa po otočení zmenší na polovicu, teda na 1,5. Výška kvádra sa otočením nezmení.



5 Telesá z kociek a kvádrov

A1 Urč, v ktorej z možností je správne zobrazený pôdorys, nárys aj bokorys stavby z kociek na obrázku. Ku každej nesprávnej možnosti napíš, prečo je nesprávna.





A: Nesedí bokorys,
horizontálne musia byť vedľa seba 3 štvorce.

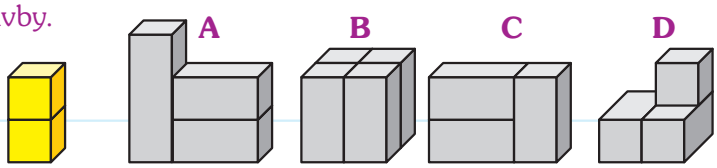
B: Nesedí pôdorys,
stavba je „široká“ len 3 kocky, nie 4.
Nesedí ani nárys.

C: Nesedí nárys,
lebo stavba je vysoká len 2 kocky, nie 3.

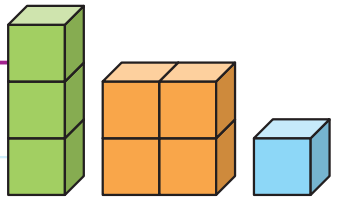
D: Správna odpoveď.

E: Nesedí pôdorys, stavba nemá tvar U.
Nesedí ani bokorys.

A2 Majo si spájaním malých kociek po dve vyrobil niekoľko takých istých kvádrov. Iba z takýchto kvádrov potom staval rôzne stavby. Ktoré zo stavieb A, B, C, D takto určite nemohol postaviť? Ako to vieš?



Stavba A nie je možná,
lebo k na výšku postavenému kvádru sa zboku dajú priložiť len dva naležato postavené kvádre. Ich horné podstavy splynú, nič nemôže prečnievať.
Stavby B aj C Majo mohol postaviť.
Stavbu D tiež Majovým spôsobom nie je možné postaviť,
lebo nepoužíval „jednokocky“, ale len spojené „dvojkocky“.



A3 Majo si vyrobil tri nové typy kvádrov – vežu, dom a kameň. Najprv si vzal z každého typu len po 2 kvádre, staval rôzne stavby a kreslil si ich plány.

a Dokresli do plánu hranice jednotlivých kvádrov tak, aby bolo ľahšie vidieť, kde je ktorý typ umiestnený. Vysvetli, ako vieš, že tvoje riešenie je správne.

3	1	2
2	2	2
1	1	1

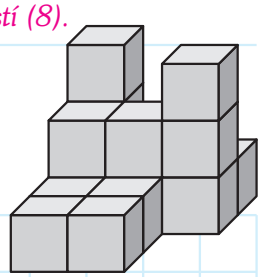
Keďže Majo má z každého typu len po dva kvádre a v pláne sú až štyri jednotky, nemôžu to byť všetko kamene. Preto v prednom rade stavby dal vežu na ležato.
Dvojky musia byť domy, lebo nemá dostatok kameňov a jeden určite použil v zadnom rade v strede.
V zadnom rade je vľavo veža, lebo ešte má jednu zvyšnú a nemohli to byť kamene, lebo ich nemá dostatok.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

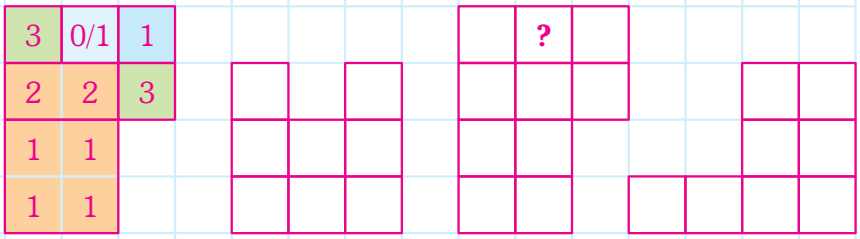
Keďže má z každého typu len po 2 kvádre, musel okrem 2 kameňov použiť aj 1 vežu a 1 dom. Nemohol použiť dva domy, lebo tie sa do plánu naležato nezmestia (ani dve veže, lebo to by musel mať 3 kamene).
Existuje až 8 spôsobov, ako to mohol Majo postaviť. Vždy do niektorého z rohov umiestnil naležato dom, vedľa neho priložil naležato vežu a zvyšok doplnil kameňmi.

Porovnajte so žiakmi ich riešenia a diskutujte, koľko je všetkých možností (8).

b Majo postavil ďalšiu stavbu. Tentokrát na stavbu nepoužil viac ako po dve veže, domy, ani kamene. Stavba zároveň nezaberá plochu väčšiu ako obdĺžnik 3 × 4. Ktoré z pohľadov (nárys/pôdorys/bokorys) vieme jednoznačne nakresliť podľa týchto informácií a ktoré nie? Zdôvodni svoju odpoveď.

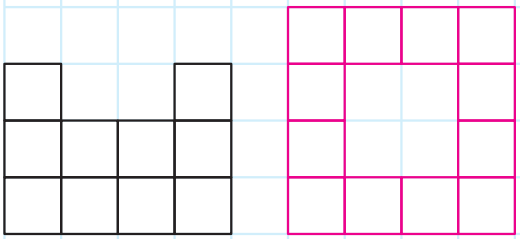


Časť stavby viditeľnú na obrázku možno postaviť z dvoch veží, dvoch domov a jedného kameňa. Ak použil aj druhý kameň, mohol ho položiť len vzadu do stredu.
Bez ohľadu na to, či tam je alebo nie je, nárys i bokorys budú rovnaké, iný by bol len pôdorys. Preto iba pôdorys nie je jednoznačný.



plán nárys pôdorys bokorys

c Nakoniec Majo postavil zo štyroch veží a štyroch domov symetrickú stavbu, ktorú nazval hrad. Nakreslil jej nárys. Dokresli jej pôdorys a vysvetli, ako vieš, že tvoje riešenie je správne.

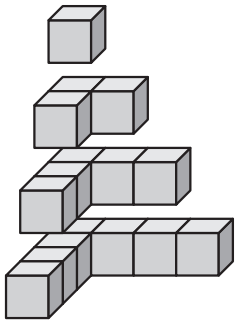


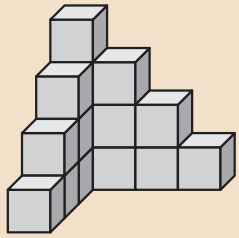
nárys pôdorys

Keďže stavba je symetrická a vieme, ktoré kvádre použil, musia byť predná a zadná stena stavby rovnaké (a tiež aj bočné steny). Preto po obvode pôdorysu bude to isté, čo na prednej stene (jej pôdorys poznáme z nárysu). Stred (nádvorie) bude prázdny, lebo už nemal k dispozícii iné kvádre.

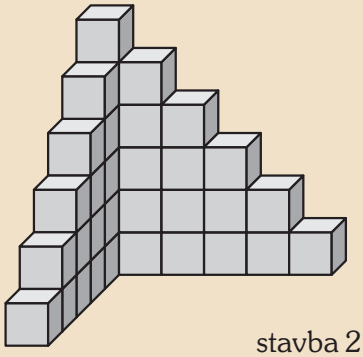
Iné riešenie: Dva domy, ktoré tvoria bočné steny, sa posunú do stredu a zaplnia pôvodné nádvorie.

A4 Viola skladá po vrstvách stavby z kociek s hranou dĺžky 10 cm tak, ako ukazuje obrázok.





stavba 1



stavba 2

a Aká je výška stavby 1 a aká stavby 2?

stavba 1: 40 cm stavba 2: 60 cm

b Koľko kociek obsahuje stavba 1 a koľko stavba 2?

stavba 1: 16 kociek stavba 2: 36 kociek

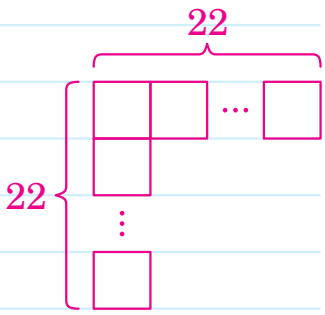
c Koľko kociek bude spolu vo Violinej stavbe, ktorá má výšku 80 cm? Vysvetli, ako vieš, že tvoja odpoveď je správna.

Stavba 1 má výšku 40 cm a stavba 2 výšku 60 cm, teda o 20 cm viac. To znamená, že ak bude Viola takto pokračovať, stavba 3 bude mať výšku 80 cm.
Stavba 2 vznikla zo stavby 1 tak, že Viola akoby na spodok pridala ďalšie 2 vrstvy. Kým stavba 1 má najspodnejšiu vrstvu dlhú 4 kocky, pri stavbe 2 to je 6 kociek, preto pri stavbe 3 to bude 8 kociek. Spodná vrstva bude mať 8 + 7 kociek, vrstva nad ňou 7 + 6 kociek a nad ňou je akoby celá stavba 2 (z 36 kociek). Spolu je to 15 + 13 + 36 = 64 kociek.

Žiaci môžu, samozrejme, opísať aj iný spôsob toho, ako vzniká nasledujúca stavba z predchádzajúcej, napr. rozdelením stavby na 2 časti, akoby schody a pristavaním identického stĺpca s výškou 6 kociek, potom dvoch stĺpcov výšky 7 kociek a ešte posledného, s výškou 8 kociek:
$6 + 2 \cdot 7 + 8 + 36 = 28 + 36 = 64$.
Alebo na to môžu ísť iba číselne – najvrchnejšia vrstva má 1 kocku, ďalšia 3, ďalšia 5, ďalšia 7 atď. Vidia postupnosť nepárnych čísel. Preto $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) + 13 + 15 = 36 + 28 = 64$. Porovnajte rôzne spôsoby, ako žiaci úlohu riešili.

d Koľko kociek bude spolu vo Violinej stavbe, ktorá má výšku 110 cm? Odpoveď zdôvodni.

Violine stavby sú vždy z párneho počtu vrstiev, preto výška jej stavieb je násobkom 20. Stavbu s výškou 110 cm Viola v tejto postupnosti nepostaví.

e Načrtni, aký tvar bude mať pôdorys Violinej stavby číslo 10.

Bude to otočené „L“ s rovnako dlhými ramenami dĺžky 22 štvorčekov.