I. Kohanová – M. Porkertová – M. Slavíčková – S. Švecová

Argumentácia v matematike

pre 6. ročník ZŠ
a 1. ročník GOŠ

1. zošit

Projekt **MaTeK**

Orbis**P**ictus**I**stropolitana

1 Počtové výkony s prirodzenými číslami

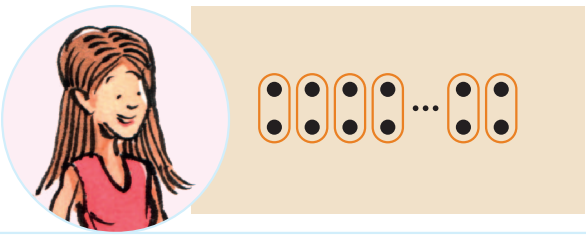
A1 Žiaci v škole hovorili o párnych a nepárnych číslach navrhovali ich rôzne definície. Rozhodni, ktoré z nich sú správne.

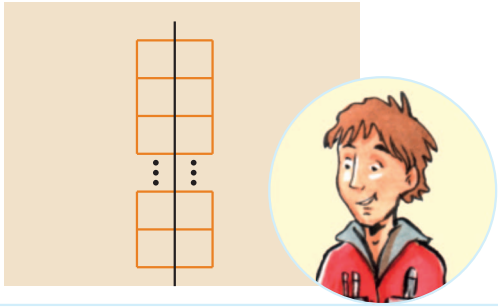
a	Číslo je párne, ak má na mieste jednotiek párnu cifru.	**správne – nesprávne**
b	Číslo je párne, ak je deliteľné dvoma bezo zvyšku.	**správne – nesprávne**
c	Číslo je párne, ak sa dá napísať ako súčet dvoch rovnakých prirodzených čísel.	**správne – nesprávne**
d	Číslo je párne, ak sa končí na 0, 2, 4, 6 alebo 8.	**správne – nesprávne**
e	Číslo je párne, ak je násobkom dvojky.	**správne – nesprávne**

Možnosti b), c), e) vyjadrujú to isté, len inými slovami. Podobne aj a) a d).

Upozornite žiakov, že tak ako pri riešení slovných úloh existuje viacero správnych postupov, aj párne čísla možno zadefinovať viacerými spôsobmi.

A2 Adela a Marek si k svojim definíciám párneho čísla nakreslili obrázok. Ku ktorej definícii z predchádzajúcej úlohy podľa teba ich obrázky prislúchajú? Svoju odpoveď zdôvodni.





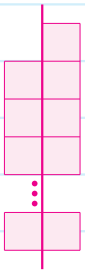
Adelin obrázok môže prislúchať k definícii e) (kreslí 2 niekoľkokrát, teda znázorňuje, že číslo je násobkom 2) alebo aj k definícii b) (delí číslo na skupinky po 2 a nič jej nezostane – deliteľnosť 2 bezo zvyšku).

Marekov obrázok prislúcha pravdepodobne k definícii c). Stredná vertikálna čiara rozdeľuje číslo na dva zhodné stĺpce, teda dve zhodné čísla.

Cieľom úlohy je, aby žiaci porozumeli modelu, ktorý znázorňuje ľubovoľné párne číslo.

A3 Napíš aspoň tri rôzne definície nepárneho čísla a aspoň k jednej nakresli obrázok, ktorý ju znázorňuje.

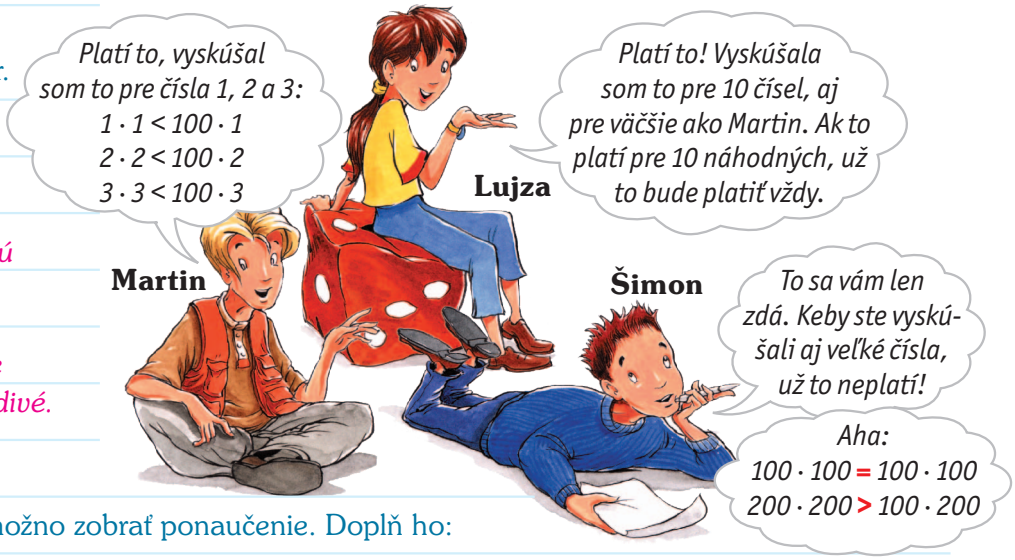
1. Číslo je nepárne, ak má na mieste jednotiek nepárnu cifru.
2. Číslo je nepárne, ak nie je deliteľné dvoma bezo zvyšku.
3. Číslo je nepárne, ak sa končí na 1, 3, 5, 7 alebo 9.
4. Číslo je nepárne, ak po delení dvoma dostaneme zvyšok 1.



A4

Martin, Lujza a Šimon mali overiť platnosť tvrdenia:
Súčin ľubovoľného prirodzeného čísla so samým sebou je vždy menší ako 100-násobok tohto čísla.

a Čie riešenie je podľa teba správne? Vysvetli svoj názor.



*Dúfame, že žiaci porozumejú tomu, že Šimon má pravdu. Našiel **kontrapríklad**, na základe ktorého môžeme tvrdiť, že tvrdenie je nepravdivé.*

b Zo Šimonovho riešenia si možno zobrať ponaučenie. Doplň ho:

Ak nejaké tvrdenie overím na troch alebo desiatich prípadoch/číslach, to ešte neznamená, že toto tvrdenie platí všeobecne/vždy.

A5

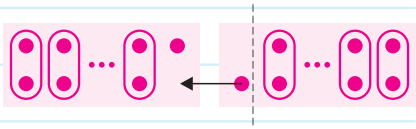
Martin, Lujza a Šimon overovali ďalšie tvrdenie:
Súčet dvoch ľubovoľných nepárnych čísel je vždy párne číslo.

Martin: *Platí to! Veď si zober napríklad: 3 + 5 = 8, 21 + 47 = 68, 13 + 109 = 122*

Lujza: *Martin, ty si sa vôbec nepoučil! Stále nevieš, že to nestačí overiť na troch príkladoch?! Šimon, pomôž! Netuším, ako začať...*

Šimon: *Skúste si nepárne čísla nakresliť a potom ich akoby „dať dokopy“.*

a Over tvrdenie podľa Šimonovho návodu. Svoje riešenie vysvetli.



Keď nakreslíme nepárne čísla ako dva rady bodiek, kde v oboch číslach jedna „vyčnieva“, a potom ich spojíme (čísla sčítame), tak dve „vyčnievajúce“ vytvoria pár. Vzniknú dva rovnako dlhé rady bodiek, čo znázorňuje, že výsledný súčet je deliteľný dvoma bezo zvyšku – je to párne číslo.

b Zdôvodni, prečo je súčet párneho a nepárneho čísla vždy nepárne číslo.

Keď si to nakreslíme, párne číslo má dva rady bodiek, nepárne tiež, ale o jednu „zvyšnú“ bodku navyše. Keď ich spojíme, bodka tam stále bude „osamote“. Preto výsledný súčet nebude deliteľný dvoma bezo zvyšku – je to nepárne číslo.

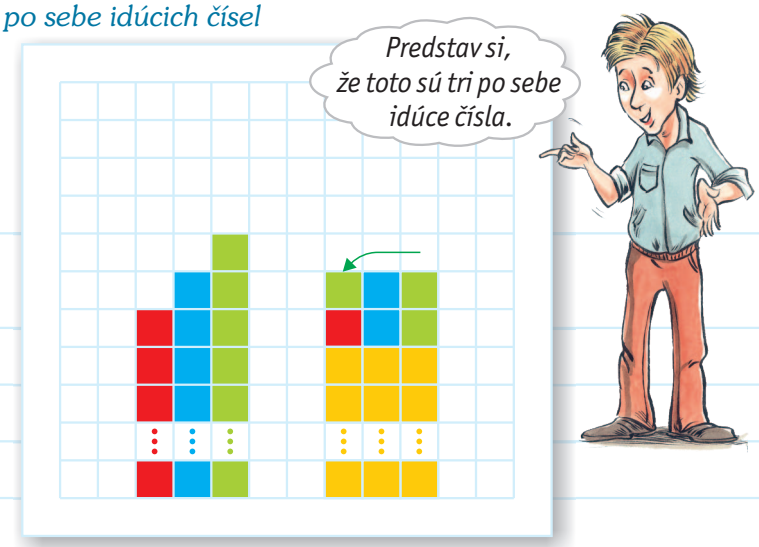
c Zdôvodni, prečo je súčet dvoch ľubovoľných párnych čísel vždy párne číslo.

Dá sa to ukázať opäť na obrázkoch, kde žiadna bodka nebude „prevyšovať“ a aj výsledný súčet bude deliteľný dvoma bezo zvyšku – je to párne číslo.

Úloha A5 nadväzuje na predchádzajúce štyri úlohy. Ak ste niektorú z nich so žiakmi nerobili, táto úloha môže byť pre nich ťažká.

A6

Alan si všimol, *že súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich čísel je taký istý ako trojnásobok prostredného.*
Chcel vedieť, či to je vždy tak.
Preto poprosil otca, aby mu to zdôvodnil.
Otec nakreslil čísla ako stĺpce štvorčekov, ale Alan otcovo vysvetlenie nechápal.



a Vysvetli, čo otec myslel touto kresbou.
Kde a ako vidno tri po sebe idúce čísla?

Prvý stĺpec predstavuje prvé číslo, napr. 6 (= 5 + 1).
Druhý, prostredný, stĺpec má o 1 štvorček viac ako prvý, teda predstavuje číslo 7 (= 5 + 2).
Tretí stĺpec má o 1 štvorček viac ako prostredný, teda predstavuje číslo 8 (= 5 + 3).
Tieto tri čísla sú po sebe idúce.

Spodná časť stĺpca môže byť ľubovoľne veľká, ale je u všetkých troch čísel rovnaká, preto takto môžeme znázorniť hociktoré tri po sebe idúce čísla.

b Otec pokračoval: *„A teraz, keď presunieš horný štvorček na voľné miesto…“* no vtom mu zazvonil telefón a odišiel.
Čo mal otec na mysli? Ktorý štvorček treba presunúť a kam, aby Alan pochopil, ako sa zo súčtu troch po sebe idúcich čísel dostaneme k trojnásobku prostredného? Vysvetli to.

Stačí presunúť najvrchnejší štvorček z posledného (pravého) stĺpca na vrch prvého (ľavého) stĺpca a dostaneme tri rovnako vysoké stĺpce.
Celkový počet štvorčekov (teda súčet troch po sebe idúcich čísel) sa nezmenil, len štvorčeky sa premiestnili.
Štvorčekov je spolu trikrát toľko, koľko ich je v prostrednom stĺpci (trojnásobok prostredného čísla).

Žiaci môžu najprv argumentovať empiricky (pre konkrétnu trojicu, napr. 6, 7, 8).
Potom je dôležité, aby ste ich naviedli na zovšeobecnenie, že to možno urobiť takto vždy, nezávisle od toho, ktoré tri po sebe idúce čísla máme.

2 Deliteľnosť

2	3	8	13	17
24	25	28	29	36
39	41	42	44	49
56	64	72	91	102

A1 Lea vyberala z rámika skupinu aspoň štyroch čísel, ktoré sú navzájom spriatelené – majú niečo spoločné. Vybrala skupinu 8, 24, 36 a 44, lebo sú to násobky čísla 4, a skupinu 3, 13, 17, 25, 29 a 39, lebo sú to nepárne čísla.

a Dá sa jej skupina násobkov čísla 4 ešte rozšíriť? Zdôvodni svoju odpoveď.

Áno, lebo násobkov 4 je v rámiku viacero. Ďalšie násobky sú 28, 56, 64 a 72.

b Nájdi inú skupinu spriatelených čísel a zdôvodni, prečo sú podľa teba „spriatelené“.

Pozri riešenie c).

c Lein brat tvrdí, že v tomto rámiku existuje minimálne šesť skupín spriatelených čísel. Má pravdu? Zdôvodni svoju odpoveď.

párne čísla: 2, 8, 24, 28, 36, 42, 44, 56, 64, 72, 102
prvočísla: 2, 3, 13, 17, 29, 41
násobky 3: 3, 24, 36, 39, 42, 72, 102
násobky 6: 24, 36, 42, 72, 102
násobky 7: 28, 42, 49, 56, 91
násobky 8: 8, 24, 56, 64, 72
...

Lein brat má pravdu.

A2 Hľadáme tri po sebe idúce čísla, z ktorých prvé je násobkom 2, druhé násobkom 3 a tretie násobkom 4.

a Nájdi najmenšie tri takéto čísla.

2, 3, 4

b Nájdi aspoň dve ďalšie nasledujúce trojice. Dávaj pozor, žiadnu nevynechaj!

14, 15, 16
26, 27, 28
38, 39, 40

c Preštuduj si nájdené trojice čísel. Aký je medzi nimi vzťah?

Každá ďalšia trojica je o 12 väčšia ako predchádzajúca.

A3

Matúš dnes chýbal, lebo bol u zubára. Spolužiak Timo mu poslal zadanie domácej úlohy z matematiky:

Podčiarkni čísla, ktoré sú deliteľné dvoma:
384, 129, 440, 16, 1 225, 372, 960, 228, 777, 666, 1 202, 51, 723, 94, 26, 145

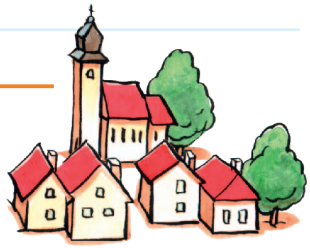
Matúš si pomohol kalkulačkou a zistil, že každé číslo vie vydeliť dvojkou. Ani raz mu nevypísala *Error*. Podčiarkol teda všetky čísla. Zrazu sa mu tento výsledok zdal nejaký podozrivý a tak začal rozmýšľať, či niekde neurobil chybu. Zavolal teda Timovi. Ten mu povedal:
„Máš to zle, nemôžeš mať podčiarknuté všetky čísla. To sa nepočíta s kalkulačkou, ale neviem prečo.“
Ako vysvetlíš Matúšovi riešenie úlohy? Môže použiť kalkulačku? Prečo?

Matúš môže použiť kalkulačku, ale musí rozumieť tomu, ako kalkulačka počíta. Matúšovi sa vždy podarilo čísla vydeliť, pretože kalkulačka neukazuje zvyšky, ale delí aj tie a výsledkom je potom desatinné číslo.

Ak výsledok delenia dvojkou na kalkulačke
– nie je prirodzené číslo, tak pri delení so zvyškom by vyšiel zvyšok 1, preto zadané číslo nie je deliteľné dvoma (napr. 129 : 2 = 64,5).
– je prirodzené číslo, tak zvyšok je 0 (napr. 128 : 2 = 64).

A4

Pán Jozef si chce kúpiť nový dom, no nepáčia sa mu čísla domov, ktoré sú deliteľné číslami 3 alebo 5.
Ak sú na predaj všetky domy očíslované od 100 do 130 (vrátane), z koľkých domov si môže vybrať? Prečo?



Čísel od 100 do 130 je 31. Z nich musíme odobrať násobky 3 a násobky 5.
To sú čísla 100, 102, 105, 108, 110, 111, 114, 115, 117, 120, 123, 125, 126, 129, 130.
Spolu je to 15 čísel. Zostane 31 – 15 = 16 čísel.
Pán Jozef si môže vybrať zo 16 domov.

Žiaci môžu úlohu riešiť aj úplným vypisovaním – spomedzi všetkých čísel od 100 do 130 vyškrtajú najprv násobky 3 a potom násobky 5. Zistia pritom, že niektoré čísla sú aj násobky 3, aj násobky 5, teda ich nesmú odrátať dvakrát.

A5

Ktoré z nasledujúcich čísel je deliteľné číslom 6? Zdôvodni svoj výber.

a jeden milión mínus jeden	999 999	Číslo je deliteľné číslom 6,
b jeden milión mínus dva	999 998	ak je deliteľné číslami 2 a 3 zároveň.
c jeden milión mínus tri	999 997	Musí byť teda párne
d jeden milión mínus štyri	999 996	a zároveň jeho ciferný súčet
e jeden milión mínus päť	999 995	musí byť deliteľný číslom 3.

Možnosti a), c), e) môžeme zamietnuť, lebo to sú nepárne čísla.
V možnosti b) je číslo 999 998, ale jeho ciferný súčet 53 nie je deliteľný číslom 3.
Možnosť d) je správne, lebo číslo 999 996 je párne a zároveň jeho ciferný súčet 51 je deliteľný číslom 3. Je teda deliteľné aj číslom 6.

A6

Čísla 4 aj 8 možno zapísať ako súčet dvoch prvočísel (4 = 2 + 2, 8 = 5 + 3).
Koľko čísel menších ako 15 **nemožno** zapísať ako súčet dvoch prvočísel? Svoje riešenie zdôvodni.

Prvočísla menšie ako 15 sú 2, 3, 5, 7, 11 a 13.

Čísla 1, 2, 3 sa ako súčet dvoch prvočísel nedajú zapísať, lebo najmenší možný súčet dvoch prvočísel je 4 (= 2 + 2).

Ako súčet dvoch prvočísel vieme zapísať tieto čísla (menšie ako 15):

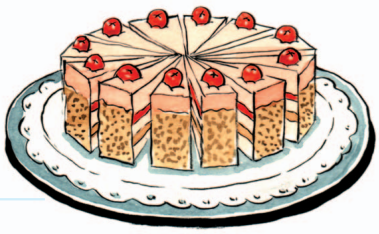
5 (= 2 + 3) 7 (= 2 + 5) 9 (= 2 + 7) 12 (= 5 + 7) 14 (= 3 + 11)
6 (= 3 + 3) 8 (= 3 + 5) 10 (= 5 + 5) 13 (= 2 + 11)

Číslo 11 sa takto nedá zapísať, lebo môžeme použiť len prvočísla 2, 3, 5, 7 (menšie ako 11) a ich kombináciou súčet 11 nedostaneme.
Výsledok 11 ako súčet 2 čísel dostaneme len v týchto prípadoch:
1 + 10 2 + 9 3 + 8 4 + 7 5 + 6 Ani jedna dvojica neobsahuje dve prvočísla.

Spomedzi čísel menších ako 15 teda nemožno ako súčet dvoch prvočísel zapísať 4 čísla: 1, 2, 3, 11.

A7

Babka pečie tortu pre svoje vnúčatá, ktoré ju prídu navštíviť. Zabudla však, či ju navštívia 2 vnúčatá, 4 vnúčatá alebo ju navštívi všetkých 5 vnúčat. Chce, aby celú tortu zjedli jej vnúčatá a aby každé vnúča dostalo rovnaké množstvo torty. Na aký najmenší počet kúskov musí tortu nakrájať, aby bola pripravená na všetky možné počty vnúčat? Svoje riešenie zdôvodni.



Počet kúskov musí byť deliteľný číslami 2, 4 a zároveň 5.
Stačí preto nájsť najmenší spoločný násobok čísel 4 a 5 (lebo čísla, ktoré sú deliteľné číslom 4, sú deliteľné aj dvojkou). $nsn(4, 5) = 20$
Babka by teda mala tortu nakrájať na 20 kúskov.

A8

Koľko je trojciferných **prvočísel**, ktoré možno vytvoriť z číslic 1, 3 a 5, pričom každú číslicu použijeme práve raz?

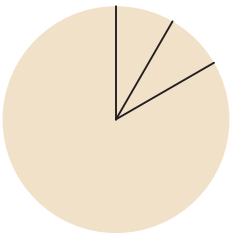
Žiadne, lebo ak máme použiť všetky číslice, ich ciferný súčet je 1 + 3 + 5 = 9, čo znamená, že ľubovoľné trojciferné číslo z nich vytvorené bude deliteľné 3 a 9.

Žiaci môžu túto úlohu riešiť aj vypisovaním tak, že si najprv vypíšu všetkých 6 čísel, ktoré sa dajú z cifier vytvoriť, a pre každé ukážu, že nie je prvočíslo.

3 Uhol a jeho veľkosť. Operácie s uhlami

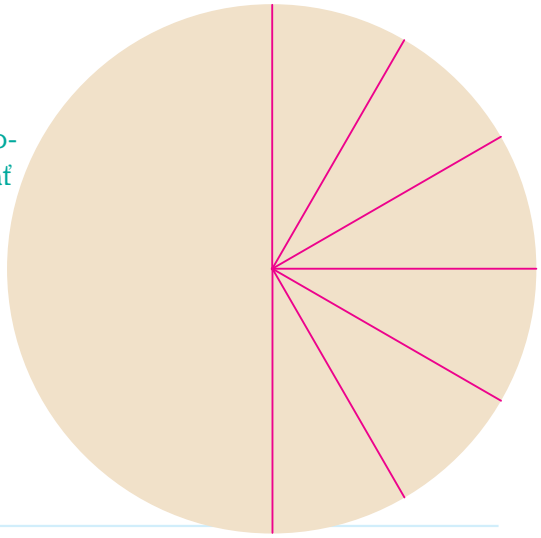
A1 Žiaci mali za úlohu vyrobiť na technickej hodine skutočné hodiny. Potrebný materiál (hodinový strojček s ručičkami a drevenú podložku v tvare kruhu) si objednali z obchodu s kreatívnymi potrebami. Jurko si objednal kruh s priemerom 35 cm a Tamara kruh s priemerom 15 cm. Na kruh bolo treba nakresliť ciferník hodín, teda rozmiestniť čísla 1 až 12.

a Tamara zobrala uhlomer a začala na svoj kruh rysovať zhodné uhly so spoločným vrcholom v strede hodín. Akú veľkosť mali tieto uhly?



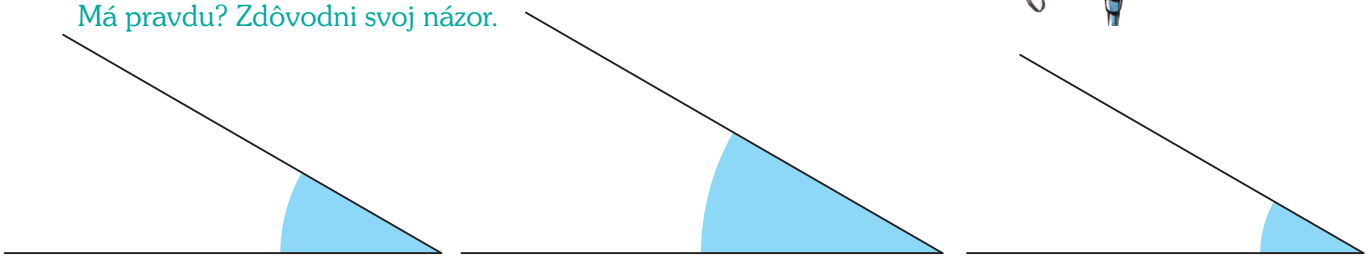
Plný uhol (celý kruh) má 360°, ten Tamara rozdelila na 12 rovnakých častí (12 hodín). Veľkosť narysovaného uhla teda bola 360° : 12 = 30°.

b Jurko sa rozhodol postupovať rovnako. Akú veľkosť budú mať uhly na jeho hodinách?



Nezáleží na veľkosti hodín, kruh treba vždy rozdeliť na 12 častí, čiže jedna časť bude mať 360° : 12 = 30°.

A2 Žiaci mali rozhodnúť, ktorý z uhlov na obrázku je najväčší. Matej tvrdil, že najväčší je ten v strede, lebo má najväčší oblúčik. Má pravdu? Zdôvodni svoj názor.

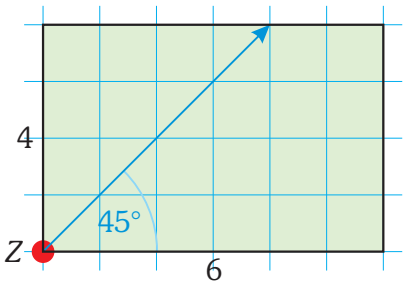


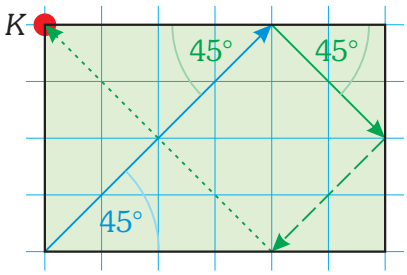
Oblúčik neurčuje veľkosť uhla.
Rovnako veľký oblúčik sa dá nakresliť aj v ostatných uhloch.
Keby sme uhly odmerali, zistíme, že všetky tri sú rovnako veľké.
Alebo si môžeme všetky tri uhly vystrihnúť, položiť na seba a porovnať ich.

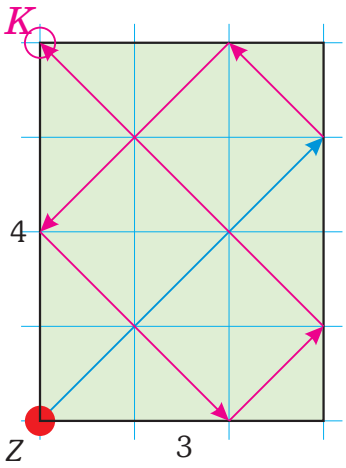
Odporúčame vytlačiť žiakom zadanie na papier, aby si porovnali uhly reálne.

A2

Biliardový stôl má tvar obdĺžnika s rozmermi 6×4. Biliardová guľa je na vypustená pod uhlom 45 stupňov z ľavého dolného rohu (začiatok *Z*) a prechádza presne pozdĺž uhlopriečok štvorcov v sieti. Vždy, keď guľa narazí na stranu stola, odrazí sa pod rovnakým uhlom a pokračuje po uhlopriečke štvorcov v sieti, až skončí v rohu stola (koniec *K*).





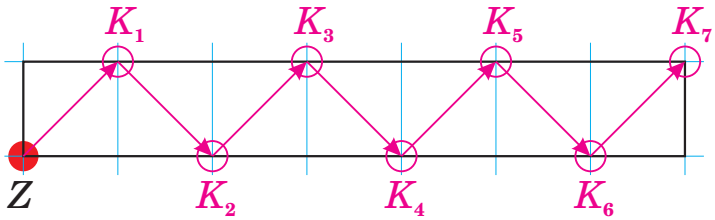


a V ktorom rohu stola skončí guľa, ak bude mať stôl rozmery 3×4?

V ľavom hornom rohu.

Odporúčame, aby ste so žiakmi úlohu riešili spolu. Prípadne im môžete zadať ešte ďalší prípad – stôl s rozmermi 2×5.

b V ktorom rohu stola skončí guľa, ak bude mať stôl rozmery 1×1, 2×1, 3×1, ..., 7×1?
Nakresli postupne všetky prípady a doplň vety.

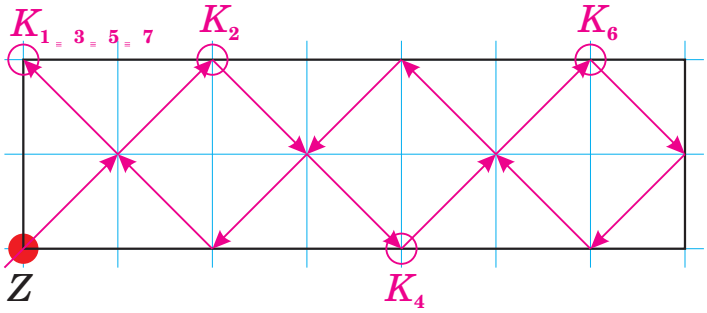


Ak bude mať stôl rozmery 20 × 1, guľa skončí v pravom dolnom rohu.

Ak bude mať stôl rozmery 31 × 1, guľa skončí v pravom hornom rohu.

Cieľom úlohy je to, aby žiaci spozorovali opakujúcu sa postupnosť a vedeli ju použiť pre iné prípady.

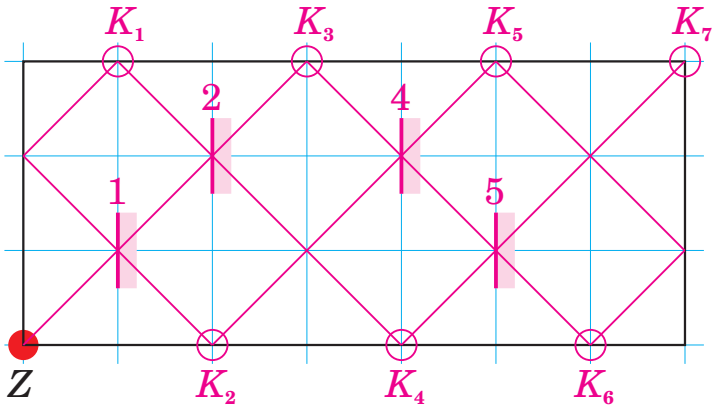
c V ktorom rohu stola skončí guľa, ak bude mať stôl rozmery 1×2, 2×2, 3×2, ..., 7×2?
Nakresli postupne všetky prípady a doplň vety.



Ak bude mať stôl rozmery 20 × 2, guľa skončí v pravom dolnom rohu.

Ak bude mať stôl rozmery 31 × 2, guľa skončí v ľavom hornom rohu.

d V ktorom rohu stola skončí guľa, ak bude mať stôl rozmery 1×3, 2×3, 3×3, ..., 7×3?
Nakresli postupne všetky prípady a doplň vety.



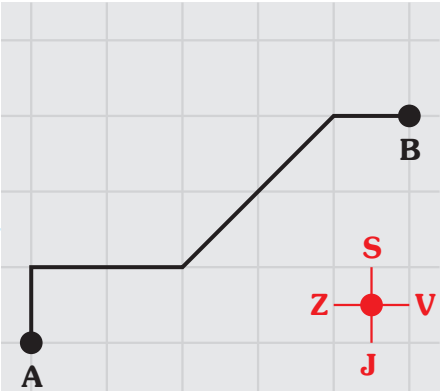
Ak bude mať stôl rozmery 20 × 3, guľa skončí v pravom dolnom rohu.

Ak bude mať stôl rozmery 31 × 3, guľa skončí v pravom hornom rohu.

Cieľom úlohy je to, aby žiaci spozorovali opakujúcu sa postupnosť a vedeli ju použiť pre iné prípady. Diskutujte, či je potrebné trajektóriu gule vždy kresliť od začiatku alebo či sa dá využiť to, čo už je vyriešené.

A4

Veľkosti uhlov môžeme použiť aj pri navigácii. Na obrázku je znázornená cesta z bodu *A* do bodu *B*. Vzdialenosť od jedného mrežového bodu k susednému (aj po mriežke aj po uhlopriečke) predstavuje jeden krok. Na začiatku cesty je v bode *A* imaginárny chodec otočený smerom na sever. Ktorý z navigátorov ho podľa plánu správne naviedol do bodu *B*? Zdôvodni svoju odpoveď.

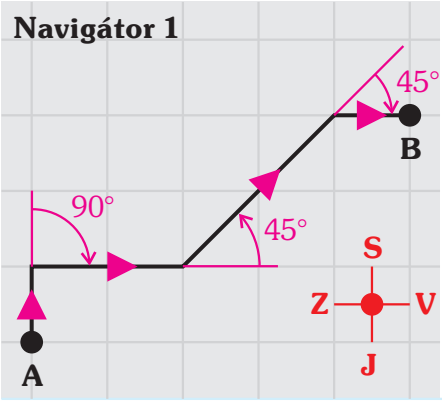


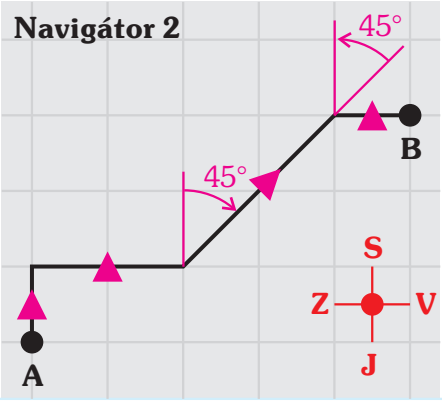
Navigátor 1
- Krok vpred;
- otoč sa o 90° vpravo;
- dva kroky vpred;
- otoč sa o 45° vľavo;
- dva kroky vpred;
- otoč sa o 45° vpravo;
- krok vpred.

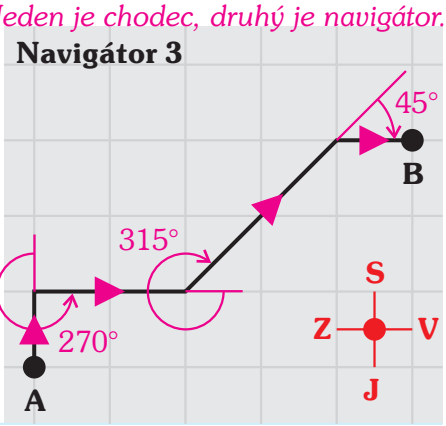
Navigátor 2
- Krok vpred;
- dva kroky vpravo;
- otoč sa o 45° vpravo;
- dva kroky vpred;
- otoč sa o 45° vľavo;
- krok vpravo.

Navigátor 3
- Krok vpred;
- otoč sa o 270° vľavo;
- dva kroky vpred;
- otoč sa o 315° vpravo;
- dva kroky vpred;
- otoč sa o 45° vpravo;
- krok vpred.

Úlohu môžete so žiakmi riešiť aj naživo – nakreslite na podlahu dostatočne veľkú sieť, aby po nej žiaci mohli chodiť. Jeden je chodec, druhý je navigátor.







Všetci traja navigátori privedú chodca do cieľa v bode *B*. Ich riešenie sa líši iba v otáčaní v smeroch vľavo a vpravo, preto aj veľkosti uhlov otočenia sú iné.

A5

Miro mal na matematike riešiť úlohu: Odmeraj, ktorý z týchto uhlov je ostrý, ktorý pravý a ktorý tupý. Neporiadny Miro si však uhlomer zabudol doma. V taške našiel iba trojuholníkové pravítko s ryskou. Mohol by úlohu vyriešiť iba pomocou tohto pravítka? Ako?

Pomocou trojuholníka s ryskou vieme zostrojiť pravý uhol. Stačí priložiť rysku na jedno rameno uhla, a ak druhé rameno splýva s hranou pravítka, tak uhol bude pravý. To platí pre prvý obrázok. Ak sa druhé rameno odkláňa smerom von od pravítka, tak uhol je väčší ako pravý uhol (čiže tupý). To nastane pri druhom obrázku. Ak sa druhé rameno prikláňa smerom dovnútra pravítka, tak uhol je menší ako pravý uhol (čiže je ostrý). To platí pre posledný obrázok.

A6 Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy. Vysvetli, prečo si to myslíš.

a Ak je trojuholník tupouhlý, potom má jeho tupý uhol veľkosť 120°.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo viem narysovať aj tupouhlý trojuholník s uhlom veľkosti 150°, ale dá sa narysovať aj s veľkosťou 120°.

b V pravouhlom trojuholníku je súčet jeho ostrých uhlov rovný 90°.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo v každom trojuholníku je súčet jeho vnútorných uhlov 180°. Ak od tohto súčtu odrátame pravý uhol, zvyšné dva (ostré) uhly budú mať veľkosť: 180° – 90° = 90°.

c 10° je 100'.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo 1° = 60' a 10° má 10-krát toľko minút, teda 600.

d Priamy uhol je väčší ako tupý uhol.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo priamy uhol je presne 180° a tupé uhly sú väčšie ako 90°, ale menšie ako 180°.

e Ak sčítame dva ostré uhly, výsledok bude tupý uhol.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. pre uhly 40° a 60° (oba sú menšie ako 90°, teda tupé) to platí, 40° + 60° = 100°, ale napr. pre uhly 40° a 30° to neplatí, lebo 40° + 30° = 70°.

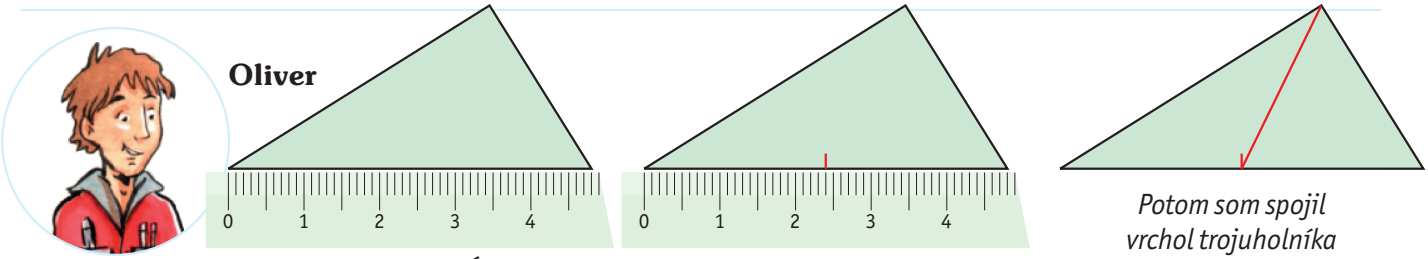
f Ak odčítame od tupého uhla pravý, výsledok bude tupý uhol.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo ak je uhol menší ako 180° a odčítame od neho uhol 90°, tak výsledok bude menší ako 180° – 90° = 90°, čo je ostrý uhol.

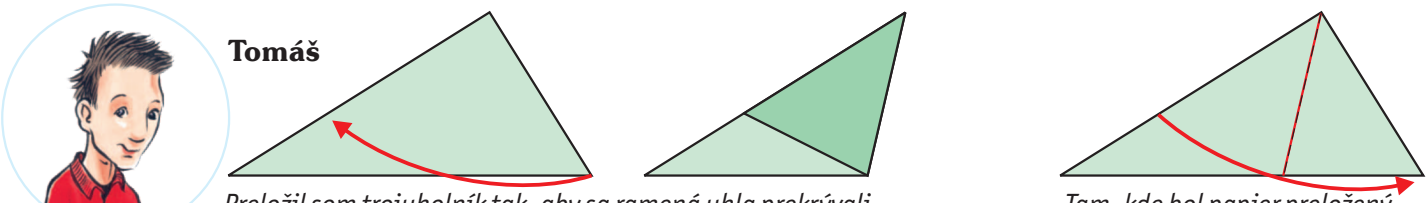
A7

Pani učiteľka žiakom rozdala trojuholníky vystrihnuté z farebného papiera.
Bez použitia uhlomera mali nájsť os uhla oproti najdlhšej strane.
Oliver a Tomáš riešili úlohu rôzne. Ktorý z nich postupoval správne? Zdôvodni svoj názor.



Odmeral som dĺžku strany trojuholníka a zaznačil jej stred.

Potom som spojil vrchol trojuholníka so stredom protiľahlej strany.



Preložil som trojuholník tak, aby sa ramená uhla prekrývali.

Tam, kde bol papier preložený, som narysoval úsečku.

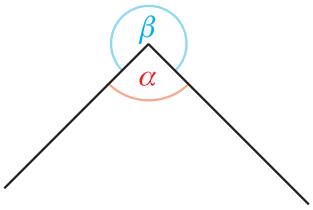
Oliver meraním rozdelil najdlhšiu stranu trojuholníka na dve rovnaké časti, ale pri tomto postupe nevieme povedať, aké veľkosti majú dva vzniknuté uhly. Z obrázka je zrejmé, že nie sú rovnaké.

Tomáš preložením zabezpečil rovnosť uhlov pri spoločnom vrchole, a teda zostrojil os uhla.

Odporúčame žiakom trojuholníky vytlačiť, aby si riešenie úlohy mohli reálne vyskúšať. Zdôraznite, že os uhla rozdeľuje uhol na dve zhodné časti. Rozdelenie protiľahlej strany nie je podstatné.

A8

Urč veľkosti uhla β na obrázkoch (svoje riešenie zdôvodni), ak vieš, že



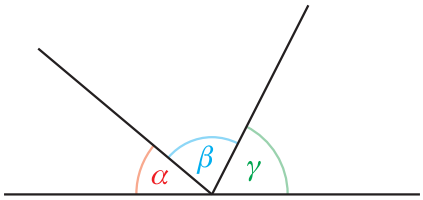
a uhol α je pravý.

Uhol β je doplnkom α do plného uhla, a keďže α je pravý, platí:

$\beta = 360° - \alpha$

$\beta = 360° - 90°$

$\beta = 270°$

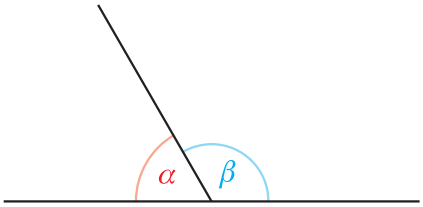


b – α je násobkom čísla 8 a leží medzi číslami 35 a 45;
– γ je násobkom čísla 9 a leží medzi číslami 60 a 70.

Násobok 8 medzi 35 a 45 je 40, preto $\alpha = 40°$.
Násobok 9 medzi 60 a 70 je 63, preto $\gamma = 63°$.
Uhol β je doplnkom α a γ do priameho uhla. Preto:

$\beta = 180° - \alpha - \beta$

$\beta = 180° - 40° - 63° = 77°$



c uhol α je polovicou uhla β.

Keďže α je polovicou β, tak ak uhol β rozdelíme na polovice, dostaneme spolu tri rovnako veľké uhly tvoriace priamy uhol 180°. Takže:

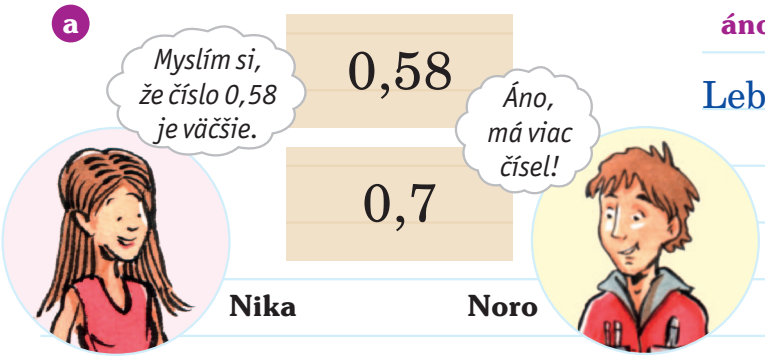
$\alpha = 180° : 3 = 60°$

$\beta = 2 \cdot 60° = 120°$

4 Desatinné čísla a ich sčitovanie a odčitovanie

A1 Nika a Noro mali určiť, ktoré číslo je väčšie. Rozhodni, v ktorých prípadoch majú pravdu. Ak pravdu nemajú, napíš vysvetlenie, ktoré im pomôže pochopiť, prečo sa mýlia.

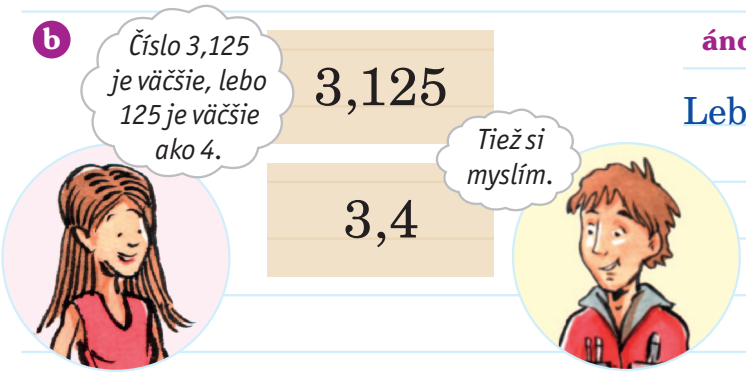
a



áno – **nie**

Lebo veľkosť desatinného čísla nezávisí od počtu jeho číslic. Ak je napr. displej mobilu široký 7,6 cm alebo 7,37 cm, druhý je užší, hoci má rozmer viac číslic. Pozri si na pravítku, kde je 7,3 a kde 7,6.

b



áno – **nie**

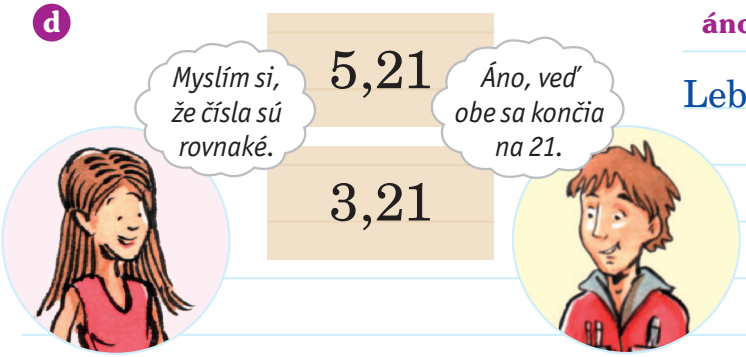
Lebo 3,4 si môžeš prepísať na 3,400, je to to isté číslo. Desatinná časť prvého čísla je menšia, lebo 125 je menej ako 400. Číslo 3,4 je väčšie.

c

áno – **nie**

Lebo 0,005 3 znamená, že to je veľmi malé číslo, úplne blízko pri nule, zatiaľ čo 0,53 je viac ako polovica, teda je bližšie k 1. Preto je väčšie!

d



áno – **nie**

Lebo ak platíš 5 eur 21 centov, zaplatíš viac ako pri cene 3 eurá 21 centov.

V úlohe sú uvedené typické žiacke mylné predstavy o veľkosti desatinných čísel. Je dôležité, aby ste so žiakmi o týchto mylných predstavách diskutovali a pri ich odstránení použili rôzne modely (peniaze, meranie, číselnú os...).

A2

Tereza mala za domácu úlohu vypočítať tri príklady na sčitovanie desatinných čísel.
Keď si spravila kontrolu na kalkulačke, dostala iný výsledok.
Kde spravila chybu? Vysvetli, ako má príklad opraviť.

a

```
 3,521
 46,73
 8194
```

V prvom príklade má čísla zle podpísané pod sebou – musí sa riadiť desatinnou čiarkou. Desatinné čiarky patria pod desatinné čiarky, jednotky pod jednotky, desatiny pod desatiny atď. Správny výsledok je 50,251.

b

```
 12,9
  5,4
 17,13
```

V druhom príklade je zápis správny, Tereza však samostatne spočítala desatinnú časť a samostatne celú časť čísla. Pri sčitovaní zapíšeme počet jednotiek z desatinnej časti a desiatku prenesieme do ďalšieho stĺpca. Správny výsledok má byť 18,3.

c

```
 56,854
283,306
239,150
```

V treťom príklade je zápis správny, Tereza však zabudla pri prechode cez desiatku preniesť jednotku do ďalšieho rádu. Správny výsledok má byť 340,16.

A3

Kamil si myslel dve desatinné čísla, obe s dvoma desatinnými miestami.
Rišovi povedal, čo o nich platí, a Rišo sa snažil nájsť Kamilove čísla.

a Doplň Rišove zdôvodnenie o cifrách na mieste jednotiek.

Obe musia mať na mieste jednotiek cifru 7, lebo aby sme po zaokrúhlení ľubovoľného čísla na desatiny dostali 7,3, jeho jednotky sa nemenia a budú rovnaké ako v čísle 7,3 .

b Rišo pokračoval: *„Hmm, existujú vlastne štyri možnosti, ktoré si môžeš myslieť.“*
Doplň chýbajúce čísla tak, aby zodpovedali Kamilovým podmienkam a vysvetli, prečo je to správne.

V súčte musia vyjsť čísla 14,6.

7,29 a 7,31
7,28 a 7,32
7,27 a 7,33
7,26 a 7,34

V prvých dvoch možnostiach teda doplníme už len druhý sčítanec (už vieme, že na mieste jednotiek je cifra 7). V ďalších dvoch možnostiach ešte uvažujeme o dvojiciach, ktoré po zaokrúhlení vyjdú 7,3 a v súčte 14,6.

A4 Pani učiteľka zadala úlohu, kto najefektívnejšie sčíta čísla v tabuľke.

3,1	2,4	3,3	4,6	4,2
4,7	2,8	2,5	2,9	3,5

a Doplň chýbajúce hodnoty v žiackych riešeniach.

Adam

Najrýchlejší spôsob je sčítať najskôr čísla, ktoré majú rovnakú prvú číslicu, a potom sčítať výsledky.

2,4 + 2,8 + 2,5 + 2,9 = 10,6
3,1 + 3,3 + 3,5 = 9,9
4,6 + 4,2 + 4,7 = 13,5

9,9 + 10,6 + 13,5 = 34

Laura

Lepšie je najprv sčítať čísla v stĺpcoch a potom sčítať výsledky.

3,1	2,4	3,3	4,6	4,2	
4,7	2,8	2,5	2,9	3,5	
7,8	5,2	5,8	7,5	7,7	34

Zuzka

Lepšie je najprv sčítať čísla v riadkoch a potom sčítať výsledky.

3,1	2,4	3,3	4,6	4,2	17,6
4,7	2,8	2,5	2,9	3,5	16,4
				spolu	34

Hanka

Najjednoduchší a najrýchlejší spôsob je sčítať tie čísla, ktoré spolu vytvoria celé číslo, a tieto výsledky sčítať.

3,1 + 2,9 = 6
2,4 + 4,6 = 7
3,3 + 4,7 = 8
4,2 + 2,8 = 7
2,5 + 3,5 = 6
6 + 7 + 8 + 7 + 6 = 34

b Čie riešenie je podľa teba najefektívnejšie a prečo?

Nechajte žiakov diskutovať, ale vyžadujte zdôvodnenie.

c Čie riešenie bude považovať za najefektívnejšie pani učiteľka a prečo?

Adamov spôsob nie je ničím rýchlejší ako ostatných. Rovnako by mohol sčítať čísla aj v inom poradí, týmto si prácu vôbec neurýchli.

Laurin spôsob je efektný v tom, že sčituje po dve desatinné čísla, čo môže byť rýchle, ale nakoniec bude sčitovať až 5 desatinných čísel naraz.

Zuzkin spôsob je iba rozdelenie sčítania na dve časti, keď 2-krát počítame súčet 5 desatinných čísel a potom ešte súčet súčtov.

Hankin spôsob je najjednoduchší – keď nájdeme ku každému číslu prislúchajúcu „opačnú dvojičku“, dostaneme celé čísla, ktoré veľmi rýchlo sčítame.

Žiaci môžu uviesť rôzne argumenty i odpovede.
Hankin spôsob je efektívny, ak má žiak už istú zručnosť a dokáže čísla efektívne pospájať do dvojíc.
Cieľom úlohy je tiež žiakom ukázať, že existuje viacero spôsobov, ako sa dá úloha riešiť, a ak máme sčítať viacero čísel, má zmysel sa najprv zamyslieť, ktorý spôsob bude efektívny.

A5

Rozhodni, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé vždy, niekedy alebo nikdy. Vysvetli, prečo si to myslíš.

a Sčítaním dvoch desatinných čísel dostaneme prirodzené číslo.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. 1,6 + 1,4 = 3 a 3 je prirodzené číslo, ale 1,6 + 1,1 = 2,7 nie je prirodzené číslo.

b Od prirodzeného čísla sa nedá desatinné číslo odčítať, keďže prirodzené číslo nemá desatinné miesta.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo každé prirodzené číslo možno zapísať aj ako desatinné, napr. 8 = 8,00 (8 eur a nula centov), odčítanie je teda možné a nezávisí od druhu čísel.

c Sčítaním dvoch desatinných čísel dostanem desatinné číslo s menším počtom nenulových desatinných miest, ako mali jednotlivé sčítance.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. 3,68 + 1,02 = 4,7. Neplatí to však pre 3,68 + 1,59 = 4,27, počet desatinných miest sa nemení.

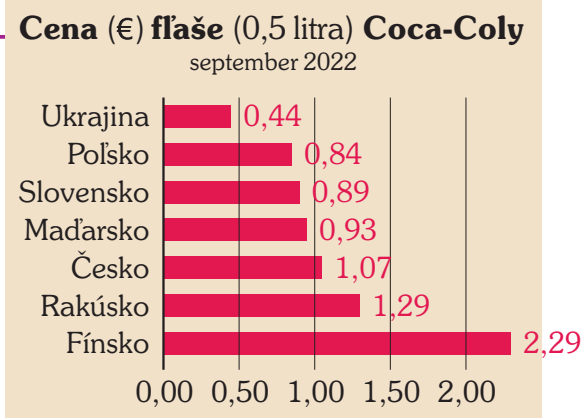
d Výsledok odčítania dvoch desatinných čísel bude mať na každom ráde číslicu menšiu, ako mal pôvodne menšenec.

Pravdivé: vždy – niekedy – nikdy

Lebo napr. pre 9,6 – 2,1 = 8,5 sa počet jednotiek zmenšil o 1 a počet desatín tiež, čiže obe cifry výsledku sú menšie. Neplatí to však napr. pre 9,6 – 2,7 = 6,9, lebo výsledok má na pozícii jednotiek síce menšiu cifru, ale na pozícii desatín väčšiu.

A6

V grafe je znázornená cena pollitrovej fľaše Coca-Coly v rôznych krajinách. Rozhodni o pravdivosti tvrdení a svoje rozhodnutie zdôvodni.



a V Rakúsku bola fľaša drahšia o 40 centov ako na Slovensku.

áno – nie

Lebo 1,29 – 0,89 = 0,40

b Rozdiel medzi cenou na Slovensku a v Maďarsku bol taký istý ako medzi cenou na Slovensku a v Poľsku.

áno – nie

Lebo Maďarsko vs. Slovensko: 0,93 – 0,89 = 0,04
Slovensko vs. Poľsko: 0,89 – 0,84 = 0,05

c Za cenu jednej fľaše vo Fínsku sa dali kúpiť dve fľaše v Česku.

áno – nie

Lebo 1,07 + 1,07 = 2,14 a to je menej ako 2,29.

d Na Ukrajine bola fľaša lacnejšia o viac ako pol eura než v Maďarsku.

áno – nie

Lebo Maďarsko vs. Ukrajina: 0,93 – 0,44 = 0,49
Fľaša bola lacnejšia o 49 centov, čo je menej ako pol eura.

A7 V tabuľkách je zobrazených TOP 5 krajín, ktoré predávali alebo nakupovali cibuľky narcisov, hyacintov a tulipánov za rok 2022. Celková hodnota cibuliek, ktoré predali krajiny Európskej únie v 2022, bola 100,6 milióna eur.

TOP 5 – PREDAJ	mil. €
Holandsko	81,9
Litva	6,7
Poľsko	4,8
Dánsko	2,1
Lotyšsko	2,0

TOP 5 – NÁKUP	mil. €
Švajčiarsko	31,3
Veľká Británia	21,4
Nórsko	11,5
Rusko	9,4
Ukrajina	5,5

a Boli v EÚ aj iné krajiny, ktoré predávali v roku 2022 cibuľky kvetov, ako tie, ktoré sú uvedené v tabuľke TOP 5? Zdôvodni svoju odpoveď.

Ak spočítame celkový predaj TOP 5 krajín, dostaneme 81,9 + 6,7 + 4,8 + 2,1 + 2 = 97,5 mil. eur. Celková hodnota predaných cibuliek však bola 100,6 mil. eur, preto cibuľky museli predávať aj iné krajiny.

b Barbora tvrdí, že zvyšní európski predajcovia cibuliek (mimo TOP 5) v roku 2022 predali cibuľky v hodnote menej ako 3 milióny eur. Má pravdu? Zdôvodni to.

Ak od celkového predaja za rok 2022 odrátame TOP 5 krajín, dostaneme hodnotu cibuliek, ktoré predali zvyšné európske krajiny. Rozdiel je 100,6 – 97,5 = 3,1 mil. eur, čo je viac ako 3 milióny eur, preto Barbora nemá pravdu.

c Majo tvrdí, že hodnota cibuliek, ktoré v roku 2022 predalo Holandsko, bola väčšia, ako hodnota cibuliek, ktoré nakúpili všetky krajiny v TOP 5 spolu. Má pravdu? Zdôvodni to.

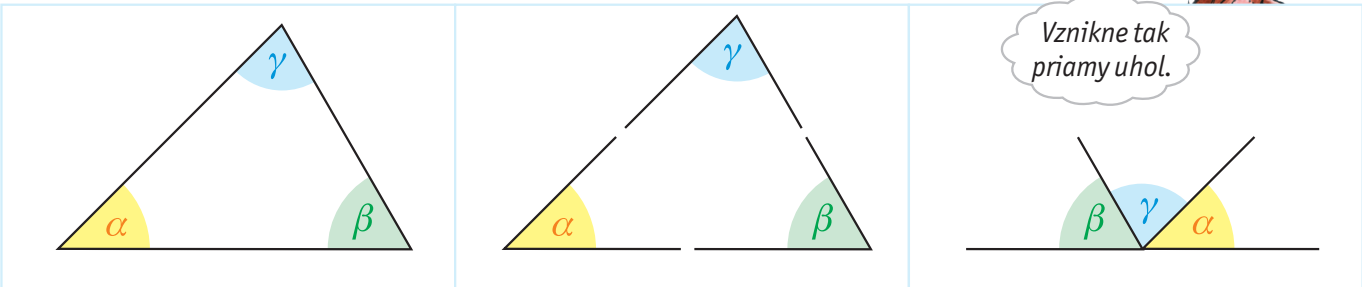
TOP 5 krajín nakúpilo spolu cibuľky v hodnote 31,3 + 21,4 + 11,5 + 9,4 + 5,5 = 79,1 mil. eur, čo je menej ako predaj Holandska. Preto má Majo pravdu.

d Tomáš vraví, že údaje v tabuľke nie sú správne. Ak spočíta všetky sumy v tabuľke predajcov a všetky sumy v tabuľke nákupcov cibuliek, tak celkové sumy sa navzájom líšia. A ani jedna suma sa nerovná spomínanej hodnote 100,6 milióna eur. V čom je chyba?

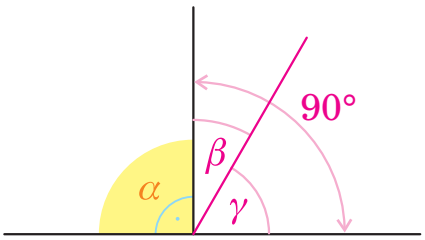
Tabuľka je vytvorená správne – nezobrazuje totiž všetkých predajcov a všetkých nákupcov, ale iba prvých 5 miest z každého rebríčka. Aj iné krajiny predávali alebo nakupovali cibuľky, preto celková hodnota 100,6 milióna eur je vyššia, než suma v tabuľkách.

5 Trojuholník, jeho vlastnosti a konštrukcie

A1 Súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°. Vieme to overiť tak, že trojuholník rozstrihneme na 3 časti tak, aby sme uhly mohli priložiť vedľa seba.

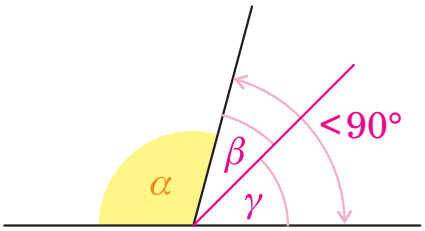


a Keby bol uhol α pravý, aké môžu byť zvyšné dva uhly trojuholníka?



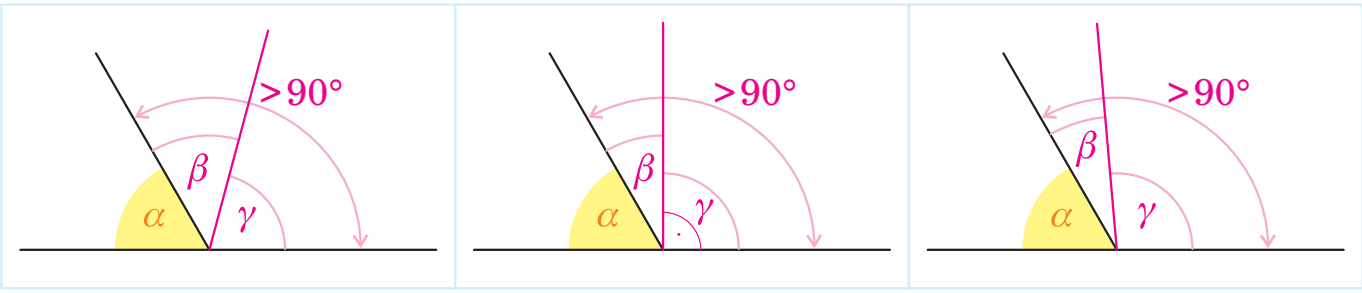
Keďže $\alpha = 90°$ a súčet všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, tak zvyšné dva uhly musia mať spolu tiež 90°.
Keďže vnútorný uhol trojuholníka nesmie byť nulový, tak oba uhly musia byť ostré.

b Keby bol uhol α tupý, aké môžu byť zvyšné dva uhly trojuholníka?



Keďže $\alpha > 90°$ a súčet všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, tak zvyšné dva uhly musia mať spolu menej ako 90°.
Oba uhly musia byť ostré.

c Keby bol uhol α ostrý, aké môžu byť zvyšné dva uhly trojuholníka?



Keďže $\alpha < 90°$ a súčet všetkých uhlov v trojuholníku je 180°, tak zvyšné dva uhly musia mať spolu viac ako 90°.
Jeden z dvojice uhlov bude vždy ostrý a zvyšný uhol môže byť tupý, ostrý alebo pravý (v závislosti od konkrétnej veľkosti ostrých uhlov).

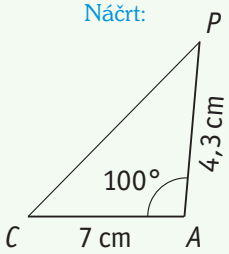
A2 Janka nevedela narysovať trojuholník *CAP* podľa postupu uvedenom v úlohe 7, pretože nechápala, kde sa zrazu vzal bod *X*. V akej vzdialenosti ho má narysovať a kam potom zase zmizne?

a Vysvetli jej, čo má urobiť a prečo.

76 Nový Pomocník 6

7 Zostroj trojuholník *CAP*, v ktorom $|CA| = 7$ cm, $|AP| = 4{,}3$ cm a $\alpha = 100°$. Pozri si náčrt a postup.

Náčrt:



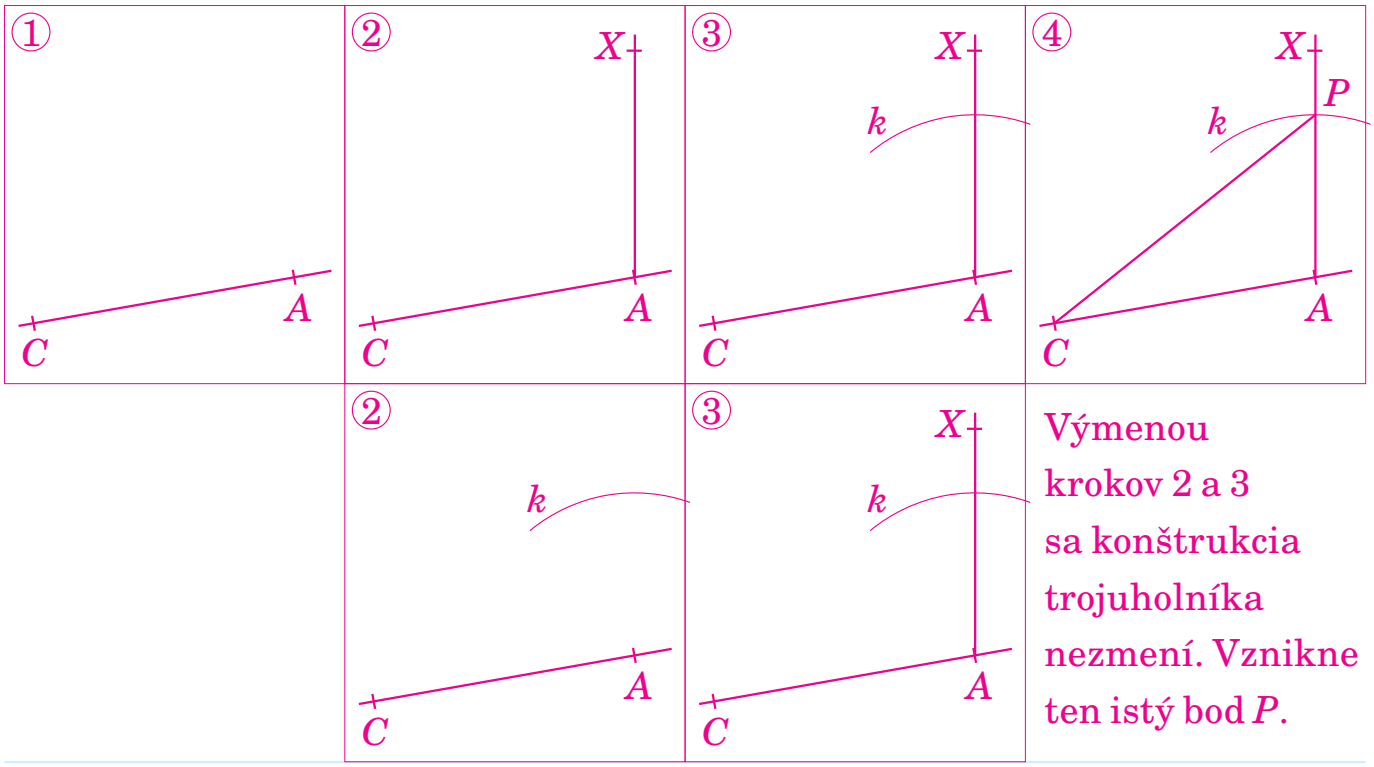
Postup:

1. CA; $|CA| = 7$ cm
2. $\sphericalangle CAX$; $|\sphericalangle CAX| = 100°$
3. k; $k(A, 4{,}3\text{ cm})$
4. P; $P \in k \cap \overrightarrow{AX}$
5. $\triangle CAP$

Konštrukcia:

Keď rysujeme uhol s veľkosťou 100°, nemôžeme použiť bod *P*, pretože zatiaľ nevieme, kde presne sa nachádza – nájdeme ho až v 4. kroku konštrukcie. Jeho vzdialenosť od bodu *A* je síce 4,3 cm, ale kým nezostrojíme uhol pri vrchole *A*, nevieme, ktorým smerom „natočiť“ pravítko. Použijeme teda pomocný bod *X*, ktorým označíme druhé rameno uhla s veľkosťou 100°. Na vzdialenosti bodu *X* od vrcholu *A* nezáleží. Bod *P* potom bude ležať na polpriamke *AX* vo vzdialenosti 4,3 cm od bodu *A*. Ak nájdeme bod *P*, bod *X* už nepotrebujeme, preto ho už ďalej nepoužívame.

b Môžu sa poprehadzovať niektoré kroky postupu alebo je toto jediné správne poradie, v akom sa dá trojuholník *CAP* zostrojiť? Zdôvodni svoju odpoveď.



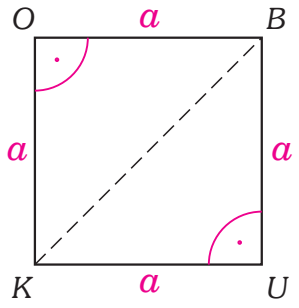
Výmenou krokov 2 a 3 sa konštrukcia trojuholníka nezmení. Vznikne ten istý bod *P*.

c Monika tvrdí, že existuje aj ďalší spôsob, ako zostrojiť trojuholník *CAP*, a to tak, že začne úsečkou *AP*. Opíš, aký by bol postup tejto konštrukcie.

1. AP; $|AP| = 4{,}3$ cm
2. $\sphericalangle PAX$; $|\sphericalangle PAX| = 100°$
3. k; $k(A, 7\text{ cm})$
4. P; $P \in k \cap \overrightarrow{AX}$
5. $\triangle CAP$

Kroky 2 a 3 môžeme urobiť v ľubovoľnom poradí

A3 Adam narysoval a vystrihol štvorec *KUBO* a potom ho prehol pozdĺž uhlopriečky *KB*. Tvrdí, že keďže trojuholníky *KUB* a *KOB* splynuli, sú zhodné. Vilo mu povedal: *„Ale keď to chceš dokázať, že to tak je v hocijakom štvorci, to budeš vystrihovať a ohýbať všetky možné štvorce donekonečna?“*



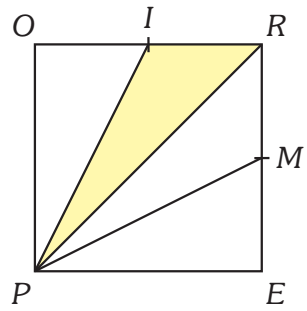
a Použi vety o zhodnosti trojuholníkov a ukáž, že △*KUB* a △*KOB* sú zhodné.

Všetky strany v ľubovoľnom štvorci sú zhodné. Označíme ich *a*. Aj vnútorné uhly v ľubovoľnom štvorci sú zhodné (sú pravé). Trojuholníky *KUB* a *KOB* sú zhodné podľa vety *sus*, lebo sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom.

b Ako by mohol Adam ukázať, že uhlopriečka *KB* je osou uhla *OBU*? Vysvetli svoju odpoveď.

Keďže trojuholníky *KUB* a *KOB* sú zhodné, musia sa zhodovať aj vo zvyšných prislúchajúcich uhloch. Preto $|\sphericalangle OBK| = |\sphericalangle UBK|$. Keďže uhlopriečka *KB* rozdelila uhol *OBU* na dva zhodné uhly, je to jeho os.

A4 Body *M* a *I* sú stredy strán štvorca *PERO* na obrázku.



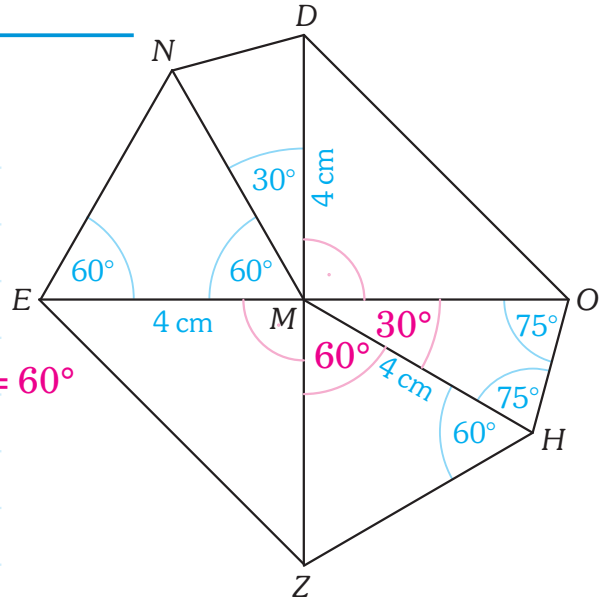
a Ktoré trojuholníky na obrázku sú zhodné s vyznačeným trojuholníkom *PRI*? Zdôvodni svoju odpoveď.

Trojuholníky *PRI* a *PRM* sú zhodné podľa vety *sus*, lebo $|RI| = |RM|$ (polovice strany štvorca), strana *PR* je spoločná a uhly *IRP* a *MRP* sú zhodné (uhlopriečka *PR* je osou uhla *MRI*).

b Existuje na obrázku aj iná dvojica zhodných trojuholníkov? Zdôvodni svoju odpoveď.

Áno, trojuholníky *PIO* a *PME* sú zhodné podľa vety *sus*. Uhly pri vrcholoch *O* a *E* sú pravé (vlastnosti štvorca), strany *PE* a *PO* sú rovnako dlhé (vlastnosti štvorca) a strany *IO* a *ME* sú rovnako dlhé (body *I* a *M* sú stredy strán štvorca).

A5 Adelka tvrdí, že trojuholníky *EMN* a *HMZ* sú zhodné, ale nevie prečo. Pomôž jej so zdôvodnením, ak vieš, že trojuholníky *ZEM* a *DOM* sú pravouhlé.



Dopočítame ďalšie údaje, aby sme mohli použiť vety o zhodnosti trojuholníkov.

$|\sphericalangle OMH| = 180° - 75° - 75° = 30°$

$|\sphericalangle HMZ| = 360° - 30° - 90° - 30° - 60° - 90° = 60°$

Trojuholníky *EMN* a *HMZ* sú zhodné podľa vety *usu*, lebo sa zhodujú v jednej strane (*EM* a *MH*) a v uhloch k nej priľahlých.